ملحق التقنيات

أوامر ميبل للمعادلات التفاضلية الاعتيادية (Maple commands for DEs)

بغية مساعدة الطالب على التأكد من النتائج التي يحصل عليها عند استخدام الأساليب المتنوعة في الكتاب وتمكينه من التعامل مع مسائل أكثر تعقيداً و توضيح الرسومات البيانية لدوال الحل، ارتأينا إضافة هذا الملحق. وفيه سنطبق بعض الأوامر المهمة المستخدمة في برمجية ميبل (Maple) والمتعلقة بالمعادلات التفاضلية الاعتيادية. في البداية سنستعرض بشكل مختصر أوليات هذه البرمجية، بعدها سنتناول عمليات إدخال المعادلات التفاضلية وتصنيفها وإيجاد حلولها بأنواعها المختلفة. وأخيراً سنتطرق الى إيجاد الحلول العددية.

1. أوامر ميبل الأولية (Elementary Maple commands)

- **إيجاد المقدار** $4+7.3^2-3/7$ **(تذكر ترتيب العمليات الحسابية):**

```
> 4+7*3^2-3/7;
```

$$\frac{466}{7}$$

- **حساب القيمة العددية بالصيغة العشرية لنتيجة آخر أمر وحفظها باسم معين :**

```
> a:=evalf(%);
```

$$a := 66.57142857$$

- **إيجاد القيمة العددية بالصيغة العشرية مباشرة للمقدارالسابق:**

```
> 4.+7*3^2-3/7;
```

$$66.57142857$$

- **حساب مساحة دائرة نصف قطرها** r **و حفظ النتيجة في** x**:**

```
> x:=Pi*r^2;
```

$$x := \pi r^2$$

- **حساب مساحة الدائرة عندما** $r=2.3$ **و حفظ النتيجة في** c **:**

```
> r:=2.3;
```

$$r := 2.3$$

```
> c:=evalf(x,15);
```

$$c := 7.22566310325652$$

- **إيجاد قيمة** $2*x$ **، حيث** x **القيمة المحفوظة سابقاً:**

```
> d:=2*x;
```

$$d := 4.6\,\pi$$

- إزالة القيمة المحفوظة سابقاً لـ x :

```
> x:='x';
```

$$x := x$$

- إيجاد $2x$ بعد إزالة القيمة المحفوظة سابقاً، لن نحصل على شيء :

```
> c:=2*x;
```

$$c := 2\,x$$

- تعويض $x=2$ في التعبير الجبري x^2-3x+1:

```
> subs(x=2,x^2-3*x+1);
```

$$-1$$

- تحليل التعبير الجبري x^2-3x+1 الى عوامل:

```
> factor(x^2+3*x-10);
```

$$(x+5)\,(x-2)$$

- توسيع التعبير الجبري $(x+5)(x-2)$:

```
> expand((x+5)*(x-2));
```

$$x^2+3\,x-10$$

- تبسيط التعبير الجبري $\frac{(x-1)(x+2)}{(x^2-1)}$:

```
> simplify((x-1)*(x+2)/(x^2-1));
```

$$\frac{x+2}{x+1}$$

- تعريف التعبير الجبري x^3-x^2:

```
> f:=x^3-x^2;
```

$$f := x^3 - x^2$$

- حساب قيمة التعبير الجبري f عندما $x=2$:

```
> subs(x=2,f);
```

$$4$$

- تعريف الدالة $g(x)=x^3-x^2$:

```
> g:=x->x^3-x^2;
```

$$g := x \to x^3 - x^2$$

- حساب قيمة الدالة g عندما $x=2$:

```
> g(2);
```

$$4$$

- إيجاد الحل الفعلي للمتراجحة $|x-2|\le 3$:

```
> solve(abs(x-2)<=3,x);
```

$RealRange(-1, 5)$

- إيجاد الجذورالفعلية للحدودية x^3-x^2+3 :

```
> solve(x^3-x^2+2,x);
```

$-1, 1+I, 1-I$

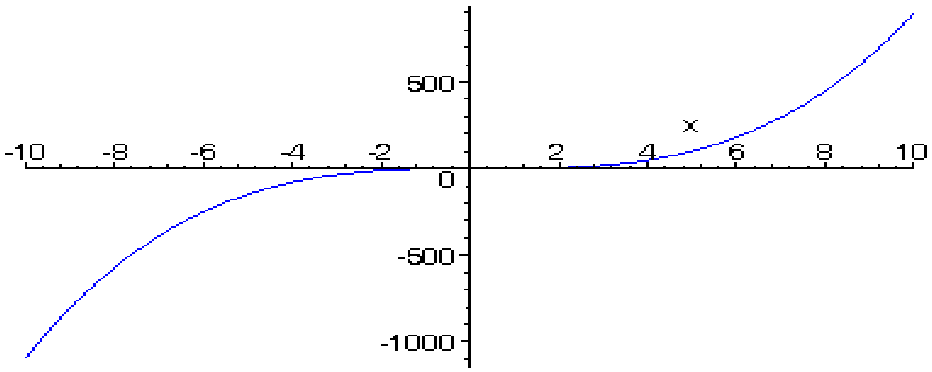
- إيجاد حل تقريبي للمعادلة $x^3-x^2+3=0$:

```
> fsolve(x^3-x^2+3,x);
```

-1.174559410

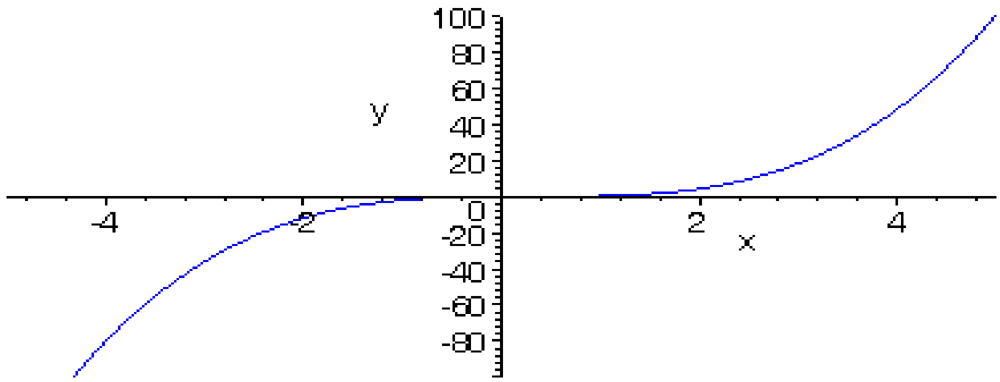
- رسم التعبير الجبري $f=x^3-x^2$ على الفترة $[-10\ ,\ 10]$:

```
> plot(f,x);
```



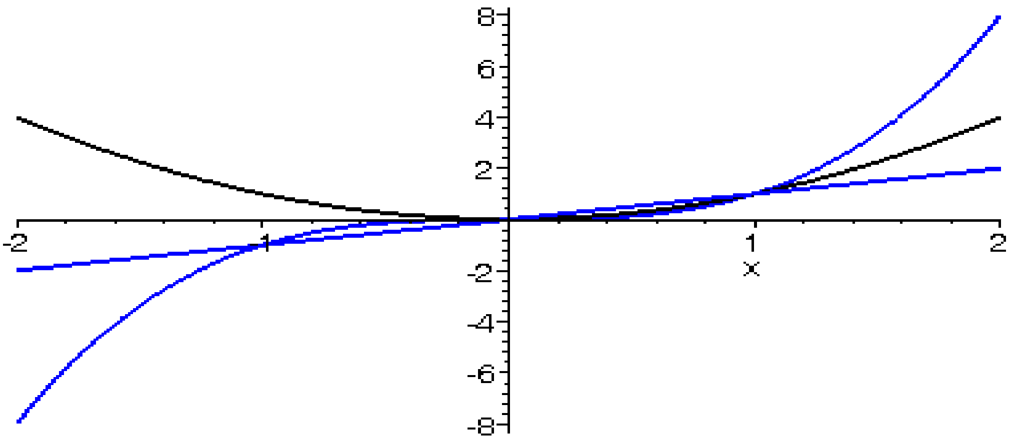
- رسم الدالة $g(x)=x^3-x^2$ على المستطيل $[-5\ ,\ 5]\times[-100\ ,\ 100]$:

```
> plot(g(x),x=-5..5,y=-100..100);
```



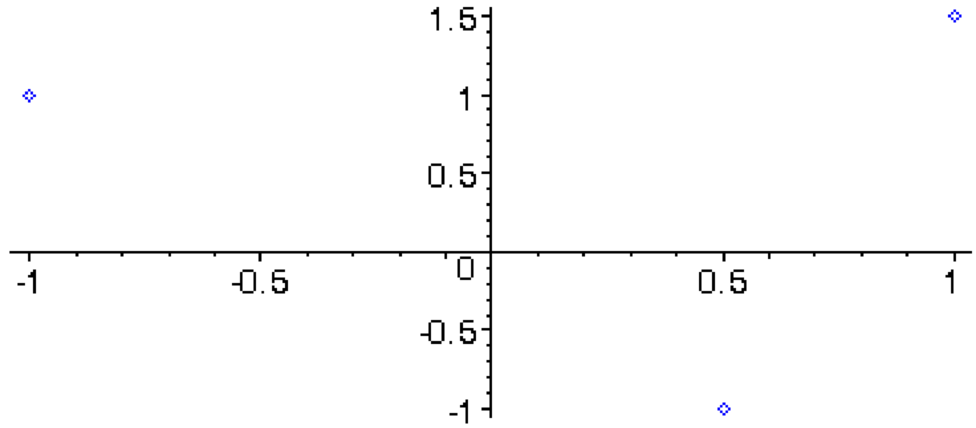
- رسم الدوال $y=x,\ \ y=x^2,\ \ y=x^3$ مع بعض على الفترة $[-2\ ,\ 2]$ بألوان مختلفة وسمك معين:

```
> plot({x,x^2,x^3}, x=-2..2, color=[red,green,blue],
  thickness=2);
```



- رسم مجموعة النقاط $\{(1,1.5),\ (-1.1),\ (0.5,-1)\}$:

```
> plot({[1,1.5],[-1,1],[0.5,-1]}, style=point);
```



2. إدخال المعادلات التفاضلية وتصنيفها (Input and classification of DEs)

لإدخال المعادلات التفاضلية علينا تسميتها لكي نستطيع الرجوع إليها بسهولة.

الأمثلة (1) : أدخل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية ثم صنفها باستخدام أوامر ميبل.

.1 $$\frac{dy}{dx}+x^2y-x\sqrt{y}=0$$

```
> with(DEtools):
> ODE1 := diff(y(x),x)+x^2*y(x)-x*sqrt(y(x))=0;
```

$$ODE1 := \left(\frac{d}{dx}y(x)\right)+x^2\,y(x)-x\,\sqrt{y(x)}=0$$

```
> odeadvisor(ODE1);
```

[_Bernoulli]

.2 $$\frac{dy}{dt}+2t\ \ y=e^{-t^2}$$

```
> ODE2 := diff(y(t),t)+2*t*y(t)=2*exp(-t^2);
```

$$ODE2 := \left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + 2\,t\,y(t) = 2\,e^{(-t^2)}$$

```
> odeadvisor(ODE2);
```

$$[\_linear]$$

$$\frac{dy}{dt} + 2t\ y^2 = 2 \qquad .3$$

```
> ODE3 := diff(y(t),t)+2*t*y(t)^2=2;
```

$$ODE3 := \left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + 2\,t\,y(t)^2 = 2$$

```
> odeadvisor(ODE3);
```

$$[\_Riccati]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \qquad .4$$

```
> ODE4 := diff(y(x),x,x)-5*diff(y(x),x)+6*y(x)=0;
```

$$ODE4 := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - 5\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 6\,y(x) = 0$$

```
> odeadvisor(ODE4);
```

$$[[\_2nd\_order, \_missing\_x]]$$

$$(x^2 + x)\frac{d^3y}{dx^3} - (x^2 - 2)\frac{d^2y}{dx^2} - (x+2)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad .5$$

```
> with(DEtools):
> ODE5 := (x^2+x)*diff(y(x),x,x,x)-(x^2-2)*diff(y(x),x,x)-
(x+2)*diff(y(x),x)=0;
```

$$ODE5 := (x^2 + x)\left(\frac{d^3}{dx^3}y(x)\right) - (x^2 - 2)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - (x+2)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = 0$$

```
> odeadvisor(ODE5);
```

$$[[\_3rd\_order, \_missing\_y]]$$

$$2xy + (x^2 - y)y' = 0 \qquad .6$$

```
> ODE6 := 2*x*y(x)+(x^2-y(x))*diff(y(x),x)= 0;
```

$$ODE6 := 2\,x\,y(x) + (x^2 - y(x))\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = 0$$

```
> odeadvisor(ODE6,y(x));
```

$$[[\_homogeneous, class\ G], \_exact, \_rational, [\_Abel, 2nd\ type, class\ A]]$$

3. حلول المعادلات التفاضلية واختبارها (Solutions of DEs and solution test)

الأمثلة (2) : لكلٍ من المعادلات التفاضلية الآتية جد عائلة الحلول باستخدام أوامر ميبل:

1. $\frac{dy}{dt} + 2t\ \ y = e^{-t^2}$

```
> with(DEtools):
> ODE2:= diff(y(t),t)+2*t*y(t)=2*exp(-t^2);
```

$$ODE2 := \left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + 2\,t\,y(t) = 2\,\mathbf{e}^{(-t^2)}$$

```
> Sol2:=dsolve(ODE2);
```

$$Sol2 := y(t) = (2\,t + \_C1)\,\mathbf{e}^{(-t^2)}$$

2. $\frac{dy}{dt} + 2t\ y^2\ = 2$

```
> ODE3 := diff(y(t),t)+2*t*y(t)^2=2;
```

$$ODE3 := \left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + 2\,t\,y(t)^2 = 2$$

```
> Sol3:=dsolve(ODE3);
```

$$Sol3 := y(t) = -\frac{\mathrm{BesselK}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}t^{(3/2)}\right) - \_C1\,\mathrm{BesselI}\left(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3}t^{(3/2)}\right)}{\sqrt{t}\left(\_C1\,\mathrm{BesselI}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}t^{(3/2)}\right) + \mathrm{BesselK}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}t^{(3/2)}\right)\right)}$$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

```
> ODE4:= diff(y(x),x,x)-5*diff(y(x),x)+6*y(x)=0;
```

$$ODE4 := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - 5\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 6\,y(x) = 0$$

```
> Sol4:=dsolve(ODE4);
```

$$Sol4 := y(x) = \_C1\, e^{(3\,x)} + \_C2\, e^{(2\,x)}$$

$$(x^2+x)\frac{d^3y}{dx^3} - (x^2-2)\frac{d^2y}{dx^2} - (x+2)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad .4$$

```
> ODE5 := (x^2+x)*diff(y(x),x,x,x)-(x^2-2)*diff(y(x),x,x)-
(x+2)*diff(y(x),x)=0;
```

$$ODE5 := (x^2+x)\left(\frac{d^3}{dx^3}y(x)\right) - (x^2-2)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) - (x+2)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = 0$$

```
> dsolve(ODE5);
```

$$y(x) = \_C1 + \_C2\ln(x) + \_C3\, e^{x}$$

$$2xy + (x^2 - y)y' = 0 \quad .5$$

```
> with(DEtools):
> ODE6:= 2*x*y(x)+(x^2-y(x))*diff(y(x),x)= 0;
```

$$ODE6 := 2\,x\,y(x) + (x^2 - y(x))\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = 0$$

```
> Sol6:=dsolve(ODE6);
```

$$Sol6 := y(x) = x^2 + \sqrt{x^4 + \_C1},\ y(x) = x^2 - \sqrt{x^4 + \_C1}$$

```
> dsolve(ODE6,implicit);
```

$$\ln(x) - \_C1 + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{y(x)\,(-2\,x^2 + y(x))}{x^4}\right) = 0$$

المثال (3) : تحقق من كون الدوال أو عوائل الدوال أو المعادلات الضمنية الآتية حلولاً للمعادلة التفاضلية $x + yy' = 0$ **باستخدام أوامر ميبل:**

```
> restart;  with(DEtools):
> de:=x+y(x)*diff(y(x),x)=0;
```

$$de := x + y(x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = 0$$

1. $y^2 + x^2 = 4$

```
> eq1:=x^2+y(x)^2=4 ; odetest(eq1,de,y(x));
```

$$eq1 := y(x)^2 + x^2 = 4$$

$$0$$

2. $y^2 + x^2 = C$

```
> eq2:=x^2+y(x)^2=C ; odetest(eq2,de,y(x));
```

$$eq2 := y(x)^2 + x^2 = C$$

$$0$$

3. $y^2 + x^2 + 1 = 0$

```
> eq3:=y(x)=sqrt(C-x^2) ; odetest(eq3,de,y(x));
```

$$eq3 := y(x) = \sqrt{C - x^2}$$

$$0$$

4. $y = \sqrt{C - x^2}$

```
> eq4:=x^2+y(x)^2+x=0 ; odetest(eq4,de,y(x));
```

$$eq4 := x^2 + y(x)^2 + x = 0$$

$$\frac{-1}{2}$$

المثال (4) : جد حل مسائل القيم الابتدائية الآتية :

1. $x + yy' = 0$ **مع كل من الشروط الابتدائية الآتية :**

أ- $y(0) = 2$ ، **ب-** $y(0) = -2$ ، **جـ -** $y(1) = 1$ **(جد حلاً ضمنياً)**

```
> with(DEtools):
> de:=x+y(x)*diff(y(x),x)=0;
```

$$de := x + y(x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = 0$$

```
> dsolve({de,y(0)=2},y(x));
```

$$y(x) = \sqrt{-x^2 + 4}$$

```
> dsolve({de,y(0)=-2},y(x));
```

$$y(x) = -\sqrt{-x^2 + 4}$$

```
> dsolve({de,y(1)=1},y(x));
```

$$y(x) = \sqrt{-x^2+2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0\ ,\ \ x(0)=2\ ,\ \ x'(0)=1 \qquad .2$$

```
> with(DEtools):
> de:=diff(x(t),t,t)+x(t)=0;
```

$$de := \left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right) + x(t) = 0$$

```
> dsolve({de,x(0)=2,D(x)(0)=1},x(t));
```

$$x(t) = \sin(t) + 2\cos(t)$$

$$y''' + 8y = 2x - 5 + e^{-2x}\ ,\ \ y(0)=-5\ ,\ \ y'(0)=3\ ,\ \ y''(0)=-4 \qquad .3$$

```
> de:=diff(y(x),x,x,x)+8*y(x)=2*x-5+8*exp(-2*x);
```

$$de := \left(\frac{d^3}{dx^3}y(x)\right) + 8\,y(x) = 2\,x - 5 + 8\,e^{(-2\,x)}$$

```
> dsolve({de,y(0)=-5,D(y)(0)=3,(D@@2)(y)(0)=-4},y(x));
```

$$y(x) = \frac{1}{4}x - \frac{5}{8} + \frac{2}{3}e^{(-2\,x)}x - \frac{23}{12}e^{(-2\,x)} + \frac{17}{72}e^{x}\sin(\sqrt{3}\,x)\sqrt{3}$$
$$- \frac{59}{24}e^{x}\cos(\sqrt{3}\,x)$$

.4 حلول خاصة لبعض المعادلات التفاضلية (Special solutions for some DEs)

المثال (5) : جد حل كل مسألة من مسائل القيم الابتدائية الآتية، ثم تحقق منه باستخدام أوامر ميبل:

$$.1 \qquad \frac{dy}{dx}+y=f(x)\ ,\ \ f(x)=\begin{cases}1\ , & x<1\\ 0\ , & x\geq 1\end{cases} \ ،$$

```
> restart;with(DEtools):
> de1:=diff(y(x),x)+y(x)=piecewise(x<1,1,0);
```

$$del1 := \left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + y(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

```
> sol1:=dsolve(%);
```

$$sol1 := y(x) = \begin{cases} 1 + e^{(-x)}\_C1 & x < 1 \\ e^{(-x)}\_C1 + e^{(1-x)} & 1 \le x \end{cases}$$

```
> odetest(sol1,de1,y(x));
```

$$\begin{cases} undefined & x = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

.2 ، $y'' + y = f(x)$, $f(x) = \begin{cases} 1\ , & x < \pi \\ \sin(x)\ , & \pi \le x < 2\pi \\ 0\ , & x \ge 2\pi \end{cases}$

```
> restart;with(DEtools):
> ode2 := diff(y(x),x$2) + y(x) =
                  piecewise(x<Pi,1,x<2*Pi,sin(x),0);
```

$$ode2 := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + y(x) = \begin{cases} 1 & x < \pi \\ \sin(x) & x < 2\pi \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

```
> sol2 := dsolve(%);
```

$$sol2 := y(x) = PIECEWISE\Big([\sin(x)\,\_C2 + \cos(x)\,\_C1 + 1,\ x < \pi],$$

$$\Big[\sin(x)\,\_C2 + \cos(x)\,\_C1 - \cos(x) - \frac{1}{2}\cos(x)\,x + \frac{1}{2}\cos(x)\,\pi + \frac{1}{2}\sin(x),\ x < 2\pi\Big],$$

$$\left[\sin(x)\_C2+\cos(x)\_C1-\cos(x)-\frac{1}{2}\cos(x)\pi, 2\pi \le x\right]\Big)$$

```
> odetest(sol2,ode2);
```

$$\begin{cases} undefined & x=\pi \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\text{،}\quad \frac{dy}{dx}=y^2 f(x)\ ,\quad f(x)=\begin{cases} -x-1 & , \quad x\le -1 \\ x+1 & , \quad -1<x<0 \\ 0 & , \quad x=0 \\ -1+x & , \quad 0<x<1 \\ 1-x & , \quad x\ge 1 \end{cases}$$ **.3**

```
> ode3 := diff(y(x),x)=y(x)^2*piecewise(x<=-1,-x-
1,x<0,x+1,x=0,0,x<1,x-1,1-x);
```

$$ode3 := \frac{d}{dx}y(x)=y(x)^2\left(\begin{cases} -x-1 & x\le -1 \\ x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ -1+x & x<1 \\ 1-x & otherwise \end{cases}\right)$$

```
> sol3 := dsolve(ode3);
```

$$sol3 := y(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+2x+2\_C1} & x<-1 \\ \dfrac{2}{-x^2-2-2x+2\_C1} & x<0 \\ \dfrac{2}{-4-x^2+2x+2\_C1} & x<1 \\ \dfrac{2}{-2+x^2-2x+2\_C1} & 1\le x \end{cases}$$

```
> odetest(sol3,ode3);
```

$$\begin{cases} undefined & x=0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

المثال (6) : جد حلول منظومات القيم الابتدائية الآتية، ثم تحقق منها:

$$\frac{dx}{dt}=y\ ,\ \frac{dy}{dt}=-x,\ \ x(0)=1,\ \ y(0)=-1 \qquad .1$$

```
> restart;with(DEtools):
> sys1 := {diff(y(t),t)=-x(t),diff(x(t),t)=y(t)};
```

$$sys1 := \left\{ \frac{d}{dt}y(t) = -x(t), \frac{d}{dt}x(t) = y(t) \right\}$$

```
> sol := dsolve(sys1, {x(t),y(t)});
```

$$sol1 := \{y(t) = \cos(t)\ \_C1 - \sin(t)\ \_C2, x(t) = \sin(t)\ \_C1 + \cos(t)\ \_C2\}$$

```
> sol1 := dsolve(sys1 union {x(0)=1,y(0)=-1}, {x(t),y(t)});
```

$$sol1 := \{y(t) = -\cos(t) - \sin(t), x(t) = -\sin(t) + \cos(t)\}$$

```
> odetest(sol1,sys1,{x(t),y(t)});
```

$$\{0\}$$

لاحظ نتيجة الاختبار للدوال : $x(t)=t+\sin t,\ \ y(t)=\cos t$

```
> odetest({x(t)=t+sin(t),y(t)=cos(t)},sys1,{x(t),y(t)});
```

$$\{1, t\}$$

أي أنها لا تمثل حلاً.

.2
$$\frac{dx}{dt}=x+3y+t\ ,\ \ x(0)=2$$
$$\frac{dy}{dt}=5x+3y\ ,\ \ y(0)=1$$

```
> sys2 :=
{diff(y(t),t)=5*x(t)+3*y(t),diff(x(t),t)=x(t)+3*y(t)+t};
```

$$sys2 := \left\{ \frac{d}{dt}y(t) = 5\,x(t) + 3\,y(t), \frac{d}{dt}x(t) = x(t) + 3\,y(t) + t \right\}$$

```
> sol2 := dsolve(sys2 union {x(0)=2,y(0)=1}, {x(t),y(t)});
```

$$sol2 := \left\{ y(t) = -\frac{33}{32}e^{(-2\,t)} + \frac{545}{288}e^{(6\,t)} + \frac{5}{36} - \frac{5}{12}t, \right.$$
$$\left. x(t) = \frac{33}{32}e^{(-2\,t)} + \frac{109}{96}e^{(6\,t)} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4}t \right\}$$

```
> odetest(sol2,sys2,{x(t),y(t)});
```

$$\{0\}$$

المثال (7): لكل من المعادلات التفاضلية أو مسائل القيم الابتدائية الآتية جد حلاً على شكل سلاسل القوى عند النقطة المؤشر إزاءها، ثم احسب معاملات الحدود الأربعة الأولى.

$$y''+y=0 \qquad .1$$

```
> restart;with(DEtools):ode1:=diff(y(x),x,x) + y(x);
```

$$ode1 := \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)+y(x)$$

```
> Slode[hypergeom_series_sol](ode1,y(x),0);
```

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(\_C_1\,e^{\left(\frac{1}{2}I\,n\,\pi\right)}+\_C_2\,e^{\left(-\frac{1}{2}I\,n\,\pi\right)}\right)x^n}{n!}\right)$$

```
> evalf(Sum((_C[1]*exp(-
1/2*I*n*Pi)+_C[2]*exp(1/2*I*n*Pi))*x^n/factorial(n), n = (0 ..
4)));
>
```

$$\_C_1+\_C_2+(-1.\,I\,\_C_1+1.\,I\,\_C_2)\,x$$
$$+0.5000000000\,(-1.\,\_C_1-1.\,\_C_2)\,x^2$$
$$+0.1666666667\,(1.\,I\,\_C_1-1.\,I\,\_C_2)\,x^3$$
$$+0.04166666667\,(\_C_1+\_C_2)\,x^4$$

```
> sum(C1*x^(2*n-1)/(2*n-1)!+C2*x^(2*n)/(2*n)!,n=1..2);
```

$$C1\,x+\frac{1}{2}C2\,x^2+\frac{1}{6}C1\,x^3+\frac{1}{24}C2\,x^4$$

$$2x(x-1)y''+(7x-3)y'+2y=0 \qquad .2$$

```
> restart;with(DEtools):
> ode2:=2*x*(x-1)*diff(diff(y(x),x),x)+(7*x-
                              3)*diff(y(x),x)+2*y(x);
```

$$ode2 := 2\,x\,(x-1)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)+(7\,x-3)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)+2\,y(x)$$

```
> Slode[hypergeom_series_sol](ode2,y(x),0);
```

$$\_C_1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+1)\,x^n}{2\,n+1}\right)\right)$$

```
> evalf(_C[1]*Sum((n+1)*x^n/(2*n+1), n = (0 .. 4)));
```

$$\_C_1\,(1. + 0.6666666667\,x + 0.6000000000\,x^2 + 0.5714285714\,x^3 + 0.5555555556\,x^4)$$

```
> Slode[hypergeom_series_sol](ode2,y(x),1);
```

$$\_C_1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-1)^n}{\Gamma(n+1)}\right)\right)$$

```
> evalf(_C[1]*Sum((-1)^n*GAMMA(n+1/2)*(x-1)^n/GAMMA(n+1), n
                                                  = (0 .. 4)) );
```

$$\_C_1\,(2.658680776 - 0.8862269254\,x + 0.6646701941\,(x-1.)^2 - 0.5538918284\,(x-1.)^3 + 0.4846553499\,(x-1.)^4)$$

```
> Slode[hypergeom_series_sol](ode2,y(x),2);
```

$$\_C_1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\,2^{(-n)}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-2)^n}{n!}\right)\right)$$

```
> evalf( _C[1]*Sum((-1)^n*2^(-n)*GAMMA(n+1/2)*(x-
                          2)^n/factorial(n), n = (0 .. 4)));
```

$$\_C_1\,(2.658680776 - 0.4431134627\,x + 0.1661675485\,(x-2.)^2 - 0.06923647855\,(x-2.)^3 + 0.03029095937\,(x-2.)^4)$$

$3xy'' + y' - y = 0$ **.3**

```
> restart;with(DEtools):
> ode3 := 3*x*diff(y(x),x,x) + diff(y(x),x)-y(x);
```

$$ode3 := 3\,x\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}y(x)\right) - y(x)$$

```
> Slode[hypergeom_series_sol](ode3,y(x),0);
```

$$\_C_1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^{(-n)}\,x^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)\Gamma(n+1)}\right)\right)$$

```
> evalf(sum(3^(-n)*x^n/(GAMMA(n+1/3)*GAMMA(n+1)),n=0..3));
```

$$0.3732821738 + 0.3732821738\, x + 0.04666027172\, x^2 + 0.002221917701\, x^3$$

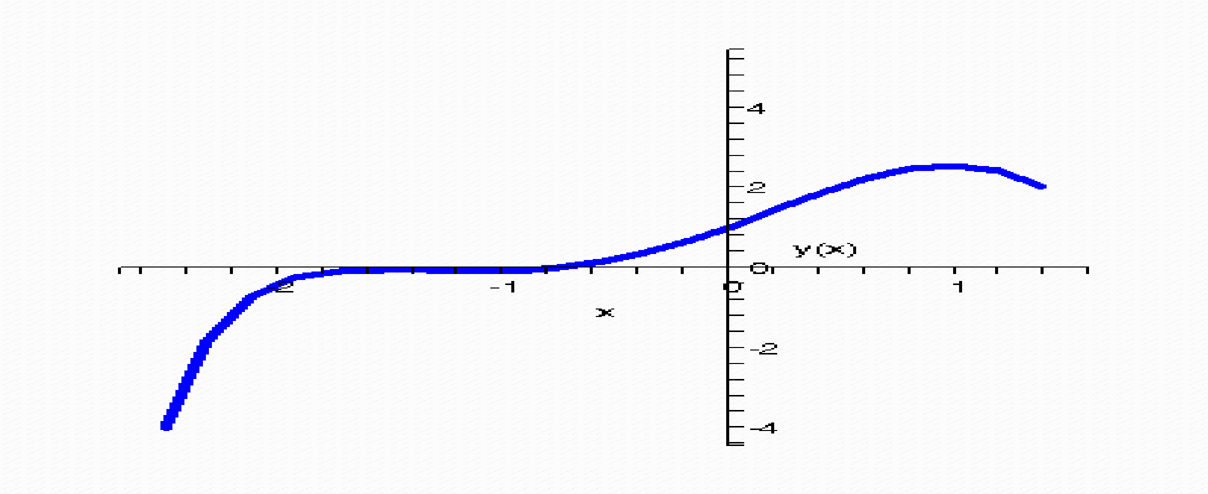
5. رسم الحقول الاتجاهية وحلول المعادلات التفاضلية

المثال (8): لكل من المعادلات التفاضلية أو مسائل القيم الابتدائية الآتية ارسم دوال الحل أو الحقل الإتجاهي أو كليهما:

.1 $\cos x\ y''' - y'' + \pi y' - y = -x\ ,\ \ y(0)=1\ ,\ \ y'(0)=2\ ,\ \ y''(0)=1$

ارسم دالة الحل على المنطقة $S=\{(x,y): -2.5 \le x \le 1.5\ ,\ -4 \le y \le 5\}$.

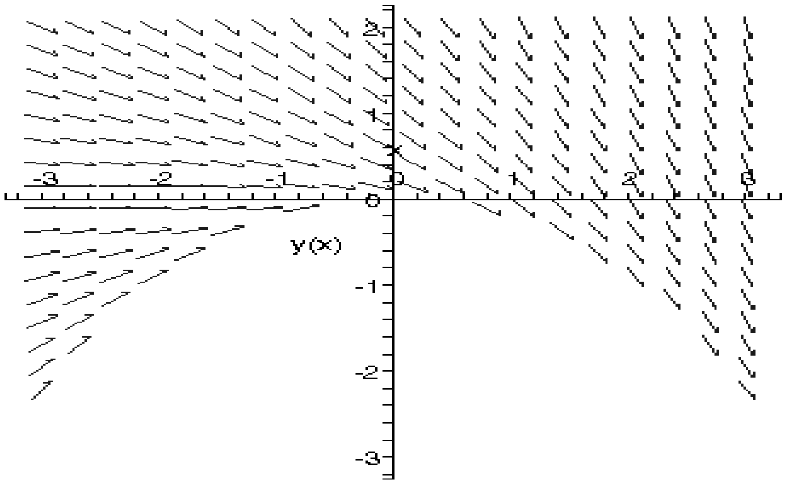
```
> with(DEtools):
DEplot(cos(x)*diff(y(x),x$3)-
diff(y(x),x$2)+Pi*diff(y(x),x)=y(x)-x,y(x),
x=-2.5..1.4,[[y(0)=1,D(y)(0)=2,(D@@2)(y)(0)=1]],y=-4..5);
```



.2 $2y' + x + \sqrt{x^2 + 4y} = 0$

ارسم الحقل الإتجاهي على المنطقة $S=\{(x,y): -3 \le x \le 3\ ,\ -3 \le y \le 2\}$.

```
> DEplot(diff(y(x),x)=1/2*(-x-(x^2+4*y(x))^(1/2)),y(x),x=-
3..3,y=-3..2,
color=1/2*(-x-(x^2+4*y)));
```



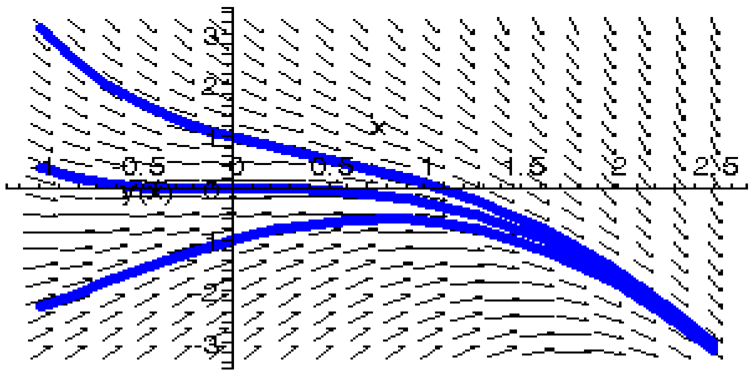
.3 $y' + y = -x^2 \ , \ -1 \le x \le 2.5$

ارسم الحقل الإتجاهي و دوال الحل التي تحقق القيم الإبتدائية

أ- $y(0) = -1$ **ب-** $y(0) = 1$ **ج-** $y(0) = 0$

```
> DEplot(D(y)(x)=-y(x)-x^2,y(x),x=-
                          1..2.5,[[y(0)=0],[y(0)=1],[y(0)=-1]],
title=`Asymptotic
solution`,colour=magenta,linecolor=[gold,yellow, wheat]);
```

Asymptotic solution



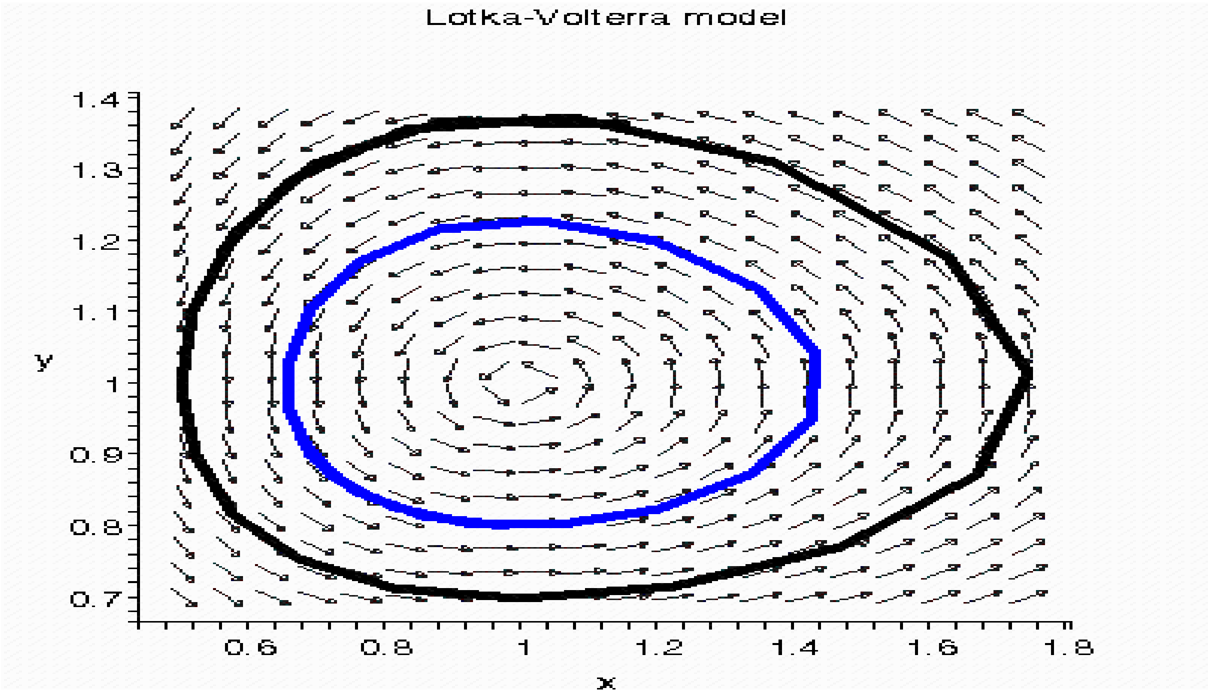
.4 $\dfrac{dx}{dt} = x(1-y)$ ، $\dfrac{dy}{dt} = 0.3y(x-1)$ ، $-7 \le t \le 7$

ارسم الحقل الاتجاهي و دوال الحل التي تحقق القيم الابتدائية:

أ- $y(0) = 1.2 \ , \ x(0) = 1.2$ **,** **ب-** $y(0) = 0.7 \ , \ x(0) = 1$ **.**

```
> with(DEtools):
```

```
DEplot([diff(x(t),t)=x(t)*(1-
                          y(t)),diff(y(t),t)=.3*y(t)*(x(t)-1)],
[x(t),y(t)],t=-7..7,[[x(0)=1.2,y(0)=1.2],[x(0)=1,y(0)=.7]],
title=`Lotka-Volterra model`,color=[.3*y(t)*(x(t)-
                                          1),x(t)*(1-y(t)),.1],
linecolor=t/2,arrows=MEDIUM);
```



6. حلول عددية لمسائل القيم الأبتدائية (Numerical solutions for IVPs)

المثال (9) : جد قيم الحل العددي لمسائل القيم الابتدائية الآتية عند النقاط المؤشرة باستخدام أوامر ميبل.

1. $y''=y,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=1$ عند $x=0.01,\ 0.1,\ 1$.

```
> restart; Digits:=15;
```

$$Digits := 15$$

```
> deq1 := diff(y(x), x$2) = y(x);
```

$$deq1 := \frac{d^2}{dx^2}y(x) = y(x)$$

```
> init1 := y(0) = 1, D(y)(0) = 1;
```

$$init1 := y(0) = 1, D(y)(0) = 1$$

```
> ans1 := dsolve({deq1, init1}, numeric,
                        output=array([0.01,0.1,1]));
```

$$ans1 := \left[\begin{array}{c} \left[x, y(x), \frac{d}{dx}y(x)\right] \\ \left[\begin{array}{ccc} 0.01 & 1.01005016717315 & 1.01005016717315 \\ 0.1 & 1.10517097815406 & 1.10517097815406 \\ 1. & 2.71828125045821 & 2.71828125045821 \end{array}\right] \end{array}\right]$$

2. جد قيم y و y' و y'' عند $x = 0.56$ حيث

$$\frac{d^4y}{dt^4} - \frac{d^3y}{dt^3} - t^2y = 0, \quad y(0) = 3.56, y'(0) = 12, y''(0) = -4, y'''(0) = 6.544$$

قارن القيمة العددية لـ $y(0.56)$ مع قيمة الحل الفعلي.

```
> deq2  := { diff(y(t),t$4) - diff(y(t),t$3) = y(t)*t^2 };
```

$$deq2 := \left\{\left(\frac{d^4}{dt^4}y(t)\right) - \left(\frac{d^3}{dt^3}y(t)\right) = y(t)\,t^2\right\}$$

```
> init2 := { y(0) = 3.56, D(y)(0) = 12, (D@@2)(y)(0) = -4,
            (D@@3)(y)(0) = 6.544 };
```

$$init2 := \left\{y(0) = 3.56, D(y)(0) = 12, D^{(2)}(y)(0) = -4, D^{(3)}(y)(0) = 6.544\right\}$$

```
> ans2 := dsolve(deq2 union init2, numeric);
```

$$ans2 := \mathbf{proc}(x\_rkf45)\ \dots\ \mathbf{end\ proc}$$

```
> ans2(0);
```

$$\left[t = 0., y(t) = 3.5600000000000, \frac{d}{dt}y(t) = 12., \frac{d^2}{dt^2}y(t) = -4., \frac{d^3}{dt^3}y(t) = 6.5440000000000\right]$$

```
> ans2(0.56);
```

$$\left[t = 0.56, y(t) = 9.87504739703349266, \quad \frac{d}{dt}y(t) = 11.0145680613924242, \right.$$

$$\left. \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 0.979872081082610480, \quad \frac{d^3}{dt^3}y(t) = 12.0116367059389173 \right]$$

المثال (10) : جد قيم الحل العددي لمنظومـات القيم الأبتدائيـة الآتيـة عند النقاط المؤشرة باستخدام أوامر ميبل.

1. جد قيم $x(t)$ **و** $y(t)$ **عند النقاط** $t = 0,\ 0.4,\ 1$:

$$\frac{dx}{dt} = y\ ,\quad x(0) = 2$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y\ ,\quad y(0) = 1$$

```
> dsys1 := {diff(x(t),t)=y(t), diff(y(t),t)=x(t)+y(t),
            x(0)=2, y(0)=1};
```

$$dsys1 := \left\{ \frac{d}{dt}x(t) = y(t), \frac{d}{dt}y(t) = x(t) + y(t), x(0) = 2, y(0) = 1 \right\}$$

```
> dsol1 := dsolve(dsys1, numeric, output=procedurelist):
> dsol1(0);
```

$$[t = 0., x(t) = 2., y(t) = 1.]$$

```
> dsol1(0.4);
```

$$[t = 0.4, x(t) = 2.69118459002265808, y(t) = 2.60811749186656883]$$

```
> dsol1(1.0);
```

$$[t = 1.0, x(t) = 5.58216755967156076, y(t) = 7.82688931187210546]$$

2. جد قيم $x(t)$ **و** $y(t)$ **عند النقاط** $t = 0,\ 1,\ 3$ **ثم قارن النتائج مع قيم الحل في المثال (6).**

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y + t\ ,\quad x(0) = 2$$
$$\frac{dy}{dt} = 5x + 3y\ ,\quad y(0) = 1$$

```
> dsys2:={diff(x(t),t)=x(t)+3*y(t)+t,
            diff(y(t),t)=5*x(t)+3*y(t), x(0)=2, y(0)=1};
```

$$dsys2 := \left\{ \frac{d}{dt}x(t) = x(t) + 3\,y(t) + t, y(0) = 1, \frac{d}{dt}y(t) = 5\,x(t) + 3\,y(t), \right.$$

$$x(0) = 2\}$$

```
> dsol2 := dsolve(dsys2, numeric, output=procedurelist):
> dsol2(0);
```

$$[t = 0., x(t) = 2., y(t) = 1.]$$

```
> dsol2(.5);
```

$$[t = 0.5, x(t) = 23.1431500941769954, y(t) = 37.5602483619159386]$$

```
> dsol2(1.5);
```

$$[t = 1.5, x(t) = 9200.61752314252590, y(t) = 15333.3922908000204]$$

بالمقارنة مع الحل الفعلي في المثال (6) نحصل على

```
> sys2 :=
{diff(y(t),t)=5*x(t)+3*y(t),diff(x(t),t)=x(t)+3*y(t)+t};
```

$$sys2 := \left\{ \frac{d}{dt}x(t) = x(t) + 3\,y(t) + t,\ \frac{d}{dt}y(t) = 5\,x(t) + 3\,y(t) \right\}$$

```
> sol2 := dsolve(sys2 union {x(0)=2,y(0)=1}, {x(t),y(t)});
```

$$sol2 := \left\{ y(t) = -\frac{33}{32}e^{(-2\,t)} + \frac{545}{288}e^{(6\,t)} + \frac{5}{36} - \frac{5}{12}t,\right.$$

$$\left. x(t) = \frac{33}{32}e^{(-2\,t)} + \frac{109}{96}e^{(6\,t)} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4}t \right\}$$

```
> evalf(subs(t=.5,sol2));
```

$$\{y(0.5) = 37.56026885, x(0.5) = 23.14316238\}$$

```
> evalf(subs(t=1.5,sol2));
```

$$\{x(1.5) = 9200.636222, y(1.5) = 15333.42345\}$$

3. جد قيماً تقريبية لـ $x(1)$ و $x'(1)$ و $y(1)$ و $y'(1)$ و $y''(1)$ حيث

$$y'''(t) = y(t) + x'(t)\ ,\ \ x''(t) = x(t)y(t) - y''(t)\ ,$$

$$x(0) = 4,\ \ x'(0) = 4.3,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2,\ \ y''(0) = -1$$

```
> dsys3 := diff(y(t),t$3)  = y(t)+diff(x(t),t),
        diff(x(t),t$2) = x(t)*y(t)-diff(y(t), t$2);
```

$$dsys3 := \frac{d^3}{dt^3}y(t) = \left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + y(t),\ \frac{d^2}{dt^2}x(t) = x(t)\,y(t) - \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right)$$

```
> init3 := y(0) = 1, D(y)(0) = 2, (D@@2)(y)(0) = -1,
         x(0) = 4, D(x)(0) = 4.3;
```

$$init3 := y(0) = 1, D(y)(0) = 2, D^{(2)}(y)(0) = -1, x(0) = 4, D(x)(0) = 4.3$$

```
> ans3 := dsolve({dsys3,init3}, numeric);
```

$$ans3 := \textbf{proc}(x\_rkf45) \ \ldots \ \textbf{end proc}$$

```
> ans3(1.0);
```

$$\left[t = 1.0, x(t) = 13.1246102378469623, \frac{d}{dt}x(t) = 18.7876943686069744, \right.$$

$$y(t) = 3.76283369180663786, \frac{d}{dt}y(t) = 5.31760321016622317,$$

$$\left. \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 10.2504689711694557 \right]$$

4. جد قيم الحل العددي للمنظومة:

$$x'' = -y \ , \ y'' = x' + y \ , \quad x(0) = 1, \ x'(0) = 0, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1$$

عند $t = 0, \ 1, \ 2.5$.

```
> restart;
> dsys4 := {(D@@2)(x)(t)=-y(t), (D@@2)(y)(t)=D(x)(t)+y(t)};
```

$$dsys4 := \left\{ D^{(2)}(y)(t) = D(x)(t) + y(t), D^{(2)}(x)(t) = -y(t) \right\}$$

```
> init4 := {x(0)=1, D(x)(0)=0, y(0)=0, D(y)(0)=1};
```

$$init4 := \{x(0) = 1, D(x)(0) = 0, y(0) = 0, D(y)(0) = 1\}$$

```
> dsol4 := dsolve(dsys4 union init4, numeric,
          output=array([0,1,2.5]));
```

$$dsol4 := \left[\left[\left[t, x(t), \frac{d}{dt}x(t), y(t), \frac{d}{dt}y(t) \right] \right], \right.$$

[

[[0., 1., 0., 0., 1.],

[1., 0.826235256087305636, -.534367728326848757,

1.13088783893591405,

1.36060298441415450

],

[2.50000000000000000, -2.13934198181061586,

-4.08805884895498384, 3.77306776326277804,

1.94871686714436776

]]]

المصادر و بعض المراجع

أ- المصادر الأجنبية:

[1] *Martha L. Abell & James P. Braselton, "Modern Differential Equations", 2nd Edition, Thomson, Brooks/Cole. 2001.*

[2] *Paul Blanchard, Robert L. Devaney, & Glen R. Hall, "Differential Equations", 2nd Edition, Thomson, Brooks/Cole. 2002.*

[3] *S. G. Deo & V. Raghavendra, "Ordinary Differential Equations and Stability Theory", 1st Edition, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd, 1980.*

[4] *Martin M. Guterman & Zbigniew H. Nitecki", Differential Equations, A First Course in ", 3ed Edition, Saunders College Publishing 1992.*

[5] *Samir B. Hadid, "Local and Global Existence Theorems on Differential Equations of Non-Integer Order", J. Fractional Calculus, Vol.7, May (1995), 111-115, Japan.*

[6] *A. C. King, J. Billingham, & S. R. Otto, "Differential Equations", 1st Edition, Cambridge University Press, 2003.*

[7] *Erwin kreyszig, "Advanced Engineering Mathematics", 8th Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1999.*

[8] *Keith B. Oldham & Jerome Spanier, "The Fractional Calculus", 1st Edition, Academic Press, 1974.*

[9] *Rama M. Rao,"Ordinary Differential Equations Theory and Applications ", 1st Edition, Affiliated East-West Press Pvt Ltd, 1980.*

[10] *James C. Robinson, "An introduction to Ordinary Differential Equations", 1st Edition, Cambridge University Press, 2004.*

[11] *George F. Simmons, " Differential Equations with Applications and Historical Notes", McGraw-Hill, New York, 1972.*

[12] *Dennis G. Zill, "A First Course in Differential Equations", 8th Edition, Thomson, Brooks/Cole. 2005.*

[13] *Dennis G. Zill, "Differential Equations with Computer Lab Experiments", 2nd Edition, Thomson, Brooks/Cole. 1998.*

[14] *Richard L. Burden & J. Faires, "Numerical Analysis", 7th Eddition, Thomson, Brooks/Cole. 2001.*

ب- المصادر العربية:

[15] **هاورد ايفز، "*مقدمة في تاريخ الرياضيات" الطبعة الثالثة*"، ترجمة: خالد السامرائي، مطبعة التعليم العالي، العراق، 1969.**

[16] **خليل إسماعيل طه، "*المعادلات التفاضلية الاعتيادية ونظرية الاستقرار*"، مطبعة التعليم العالي، العراق، 1990.**

[17] **رياض نعوم شاكر و إبراهيم رياض غزال، "*طرق حل المعادلات التفاضلية العادية وتطبيقاتها*"، مطبعة جامعة البصرة ، العراق، 1982.**

[18] **سعيد الخزاعي و خالد السامرائي، "*نظرية المعادلات التفاضلية الاعتيادية*"، مطبعة جامعة ، الموصل ، العراق، 1985.**

[19] **علي سيفي و إبتسام كمال الدين، "*مقدمة في التحليل العددي*"، جامعة بغداد، العراق، 1985 .**