أجوبة المسائل الفردية

تمارين الفصل الأول:

1. كسرية، **3.** جزئية، **5.** كسرية، **7.** خطية، رتبة 2، درجة 1،

9. غير خطية، رتبة 1، درجة 3 ، **11.** غير خطية، رتبة 1، درجة 1 ،

13. غير خطية ، رتبة 4 ، درجة 3، **15.** غير خطية ، رتبة 1 ، درجة 1،

25. أ- $y=\dfrac{1}{1+3e^{-x}}$، ب- $y=\dfrac{2e}{2e-e^{-x}}$، **27.** $x(t)=\cos t-7\sin t$،

29. $x(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos t+\dfrac{1}{4}\sin t$، **33.** $k=0,\ \dfrac{-1}{4}$ ، **35.** $m_{1,2}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$،

39. $k=6$، **41.** $k=\lambda^2$، **43.** $k=16e$، **45.** نعم الحل وحيد على $|x|\le a$، لكل a

47. أ - نصف المستوى المعرف بـ $y>0$ أو $y<0$، جـ - نصف المستوى المعرف بـ $x>0$ أو $x<0$، هـ - المنطقة المعرفة بـ $y>2,\ y<-2$ أو $-2<y<2$.

تمارين الفصل الثاني:

1. $y=\dfrac{1}{6}(x+1)^6+C$، **3.** $y=x+5\ln|x+1|+C$،

5. $-3+3x\ln|x|=xy^3+Cx$، **7.** $-5e^{-3y}=3e^{5x}+C$،

9. $2+y^2=C(4+x^2)$، **11.** $\ln|y|-\dfrac{1}{y}=C-\dfrac{1}{x}$،

13. $-2\cos x+e^y+ye^{-y}+e^{-y}=C$،

15. $\dfrac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}+2(y+1)^{\frac{1}{2}}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C$،

17. $(1+\cos x)(1+e^y)=4$، **19.** $\ln\left|\dfrac{y}{3}\right|=t-\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2}$، **21.** $3y^2-2x^3=C$،

23. $y=\dfrac{1}{C-\cos x}$، **25.** $y^2+3y=x^3-x+C$ ، **27.** $\sin^{-1}y=\ln|x|+C$،

29. $\dfrac{-1}{y}=\tan^{-1}(e^x)+C$ ، **31.** $y^3-3y^2=x^3+x-2$،

33. $\dfrac{-1}{y}=2x+x^2-1$ ، **35.** $\dfrac{1}{2}\ln|3+2y|=\sin 2x-\dfrac{\ln 2}{2}$،

37. $x=\tan(4y-\frac{3\pi}{4})$، 39. $y=-x-1+\tan(x+C)$،

41. $4(y-2x+3)=(x+C)^2$، 43. $2y-2x+\sin 2(x+y)=C$،

45. $(x-y)\ln|x-y|=y+C(x-y)$، 47. $\ln(x^2+y^2)+2\tan^{-1}\frac{y}{x}=C$،

49. $\frac{y^2}{x^2}=2\ln|x|+C$، 51. $e^{2x/y}=8\ln|y|+C$، 53. $y+x=Cx^2e^{y/x}$،

55. $y^3+3x^3\ln|x|=8x^3$، 57. $y^2=4x(x+y)^2$، 59. غير تامة،

61. تامة ، $x^2y^2+2xy=C$، 63. تامة ، $\frac{a}{2}x^2-bxy+\frac{c}{2}y^2=C_1$،

65. غير تامة ، 67. غير تامة، 69. تامة ، $\frac{1}{2}x^2+e^{xy}\cos 2x-3y=C$،

71. $\frac{1}{3}x^3+x^2y+xy^2-y=\frac{4}{3}$، 73. $4xy+x^2-5x+3y^2-y=8$،

75. $\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4=C$، 77. $x+y+xy-3\ln|xy|=C$،

79. $y\ln x=x+C$، 81. $y=\frac{1}{7}x^3-\frac{1}{5}x+Cx^{-4}$،

83. $y=\sec x+C\csc x$، 85. $y=\frac{1}{3}+Ce^{-x^3}$، 87. $y=\frac{1}{5}x^3+Cx^{-2}$،

89. $y=(x+C)e^{-x^2}$، 91. $x=-\cos y+C\sin y$، 93. $y^{-3}=\frac{-1}{2}+Ce^{3x^2}$

95. $y^{-2}=\frac{1}{2}-x+Ce^{-2x}$، 97. $y^2=1+Ce^{x^2}$، 99. $y^{-1}=1-x+Ce^{-x}$،

101. $y^{-1}=(x+C)e^{x}$، 103. $y^3=1+Cx^{-3}$، 105. $y^{-3}=\frac{1}{3}+x+Ce^{3x}$،

107. $e^{t/y}=Ct$، 109. $y^{-3}=\frac{-9}{5}x^{-1}+\frac{49}{5}x^{-6}$، 111. $y=2+\dfrac{1}{Ce^{-3x}-\frac{1}{3}}$،

113. $y=-e^{x}+\dfrac{1}{Ce^{-x}-1}$، 125. $y=Cx+1-\ln C,\ \ y=2+\ln x$،

127. $y=Cx-C^3,\ \ 27y^2=4x^3$، 129. $y=Cx-e^{C},\ \ y=x\ln x-x$،

131. $y=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-e^{-2x}), & 0\le x\le 3\\ \frac{1}{2}(e^{6}-1)e^{-2x}, & x>3\end{cases}$، 133. $y=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-x^2}, & 0\le x<1\\ (\frac{1}{2}e+\frac{3}{2})e^{-x^2}, & x\ge 1\end{cases}$.

تمارين الفصل الثالث:

.1 $y=C_2x^4$ ، .3 $x^2+y^2=C_2$ ، .5 $x^2-3y^2=\dfrac{C_2}{x}$ ، .7 $y=C_2e^{-x}$ ،

.9 $y=\dfrac{-1}{m}x+C_2$ ، .11 $3x^2-2y^2=C_2$ ، .13 $y=\dfrac{-x^2}{2}+C_2$ ،

.15 $r^2=C_2\cos 2\theta$ ، .17 $r=C_2\csc\theta$ ،

.21 $i(t)=\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{5}e^{-500t}$ ، $i(t)\to\dfrac{3}{5}$ عندما $t\to\infty$ ، .23 $i(t)=20e^{-10t}$ ،

.25 $i(t)=\dfrac{9}{5}\cos 3t-\dfrac{12}{5}\sin 3t-\dfrac{4}{5}e^{-4t}$ ، .27 $i(0.01)=1-e^{-25}$ ،

.29 $P(50)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}P_0$ ، .31 7.92 سنة، .33 2560 خلية بكترية،

.35 عدد الخلايا 40500 بعد يوم واحد ، يصل عدد الخلايا 10^6 بعد 41.5 ساعة،

.37 $A(t)=400-350e^{-0.01t},\ A(3)=60.344$ رطل

.39 $A(t)=1200+18t-\dfrac{1150}{\sqrt[3]{200}}\sqrt[3]{200+3t},\ A(3)\approx 87$ رطل

.41 $T(t)=70+230e^{-0.19018t}$ ، $T\approx 70^0$ بعد مرور 30 دقيقة.

تمارين الفصل ارابع:

.1 BVP .3 BVP ، .5 IVP ، .7 مستقلة خطيا، .9 معتمدة خطيا،

.11 مستقلة خطيا، .13 مستقلة خطيا، .15 مستقلة خطيا، .17 معتمدة خطيا،

.19 أ- $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ ، ب- $y=\dfrac{e}{e^2-1}e^x+\dfrac{e}{1-e^2}e^{-x}$ ،

.21 $y=e^x(\cos x-\sin x)$ ، .23 $y=e^x(\cos x+e^{-\pi/2}\sin x)$ ،

.25 لا يمكن، لعدم وجود حل يحقق الشرطين،

27. يمكن إيجاد حل في حالة $c_1 + c_2 = -3$، **29.** مستقلة خطيا، **31.** مستقلة خطيا، **33.** مستقلة خطيا.

تمارين الفصل الخامس:

1. $y_2 = xe^{2x},\ \ y = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x}$، **3.** $y_2 = \sin 4x,\ \ y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$،

5. $y_2 = xe^{2x/3},\ \ y = c_1 e^{2x/3} + c_2 xe^{2x/3}$، **7.** $y_2 = -1,\ \ y = c_1 \ln x - c_2$،

9. $y_2 = x\cos(\ln x),\ \ y = c_1 x\sin(\ln x) + c_2 x\cos(\ln x)$،

11. $y_2 = (2x^2 - x)e^x,\ \ y = c_1 xe^{-x} + c_2 (2x^2 - x)e^x$،

13. $y_2 = x^{-3},\ \ y = c_1 x^2 + c_2 x^{-3}$، **15.** $y = c_1 + c_2 e^{-x/4}$،

17. $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$، **19.** $y = c_1 e^{-4x} + c_2 xe^{-4x}$،

21. $y = c_1 e^{2x/3} + c_2 e^{-x/4}$، **23.** $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$،

25. $y = e^{-x/3}(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{3} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{3} x)$،

27. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 xe^{-x} + c_4 xe^x$،

29. $y = \frac{-3}{4} e^{-5x} + \frac{3}{4} e^{-x}$، **31.** $y = 0$، **33.** $y = \frac{5}{36} - \frac{5}{36} e^{-6x} + \frac{1}{6} xe^{-6x}$،

35. $y = -2\cos x$، **37.** $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + 3$،

39. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 xe^{-2x} + x^2 - 4x + \frac{7}{2}$، **41.** $y = c_1 + c_2 e^x + 3x$،

43. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{3}{4} x\cos 2x$،

45. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x^2 \cos x + \frac{1}{2} x\sin x$،

47. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{6x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{6}{37} \cos x + \frac{1}{37} \sin x$،

.49 $y=\sqrt{2}\sin 2x-\frac{1}{2}$ ، .51 $y=e^{-2x}(-10\cos x+9\sin x)+7e^{-4x}$ ،

.53 $y=\frac{-1}{6}\cos x-\frac{\pi}{4}\sin x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$ ،

.55 $(9D^2-4)y=\sin x$ ، .57 $(D^2-4D-12)y=x-6$ ،

.59 $(D^3+10D^2+25D)y=e^x$ ، .61 D^4 ،

.63 $D(D-2)$ ، .65 D^2+4 ، .67 $(D+1)(D-1)^3$ ،

.69 $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{3x}-6$ ، .71 $y=c_1+c_2e^{-x}+3x$ ،

.73 $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+\frac{1}{2}x+1$ ، .75 $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{4x}+\frac{1}{7}xe^{4x}$ ،

.77 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-e^x+3$ ، .79 $y=c_1\cos 5x+c_2\sin 5x+\frac{1}{4}\sin x$ ،

.81 $y=c_1e^{-x}+c_2e^x+(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x)e^x-5$ ،

.83 $y=e^x(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+\frac{1}{3}e^x\sin x$ ،

.85 $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$ ،

.87 $y=c_1e^{-x}+c_2e^x+\frac{1}{2}\sinh x$ ،

.89 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+(e^{-x}+e^{-2x})\ln(1+e^x)$ ،

.91 $y=c_1e^x+c_2xe^x-\frac{1}{2}e^x\ln(1+x^2)+xe^x\tan^{-1}x$ ،

.93 $y=e^x(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)-\frac{1}{27}e^x\cos 3x\ln|\sec 3x+\tan 3x|$ ،

.95 $y=x^{-1/2}(c_1\cos x+c_2\sin x+1)$ ،

.97 $y=\frac{1}{4}e^{-x/2}+\frac{3}{4}e^{x/2}+\frac{1}{8}x^2e^{x/2}-\frac{1}{4}xe^{x/2}$ ،

.99 $y=\frac{4}{9}e^{-4x}+\frac{25}{36}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{1}{9}e^{-x}$ ،

.101 $y=c_1x^{-1}+c_2x$ ، .103 $y=x^2[c_1\cos(4\ln x)+c_2\sin(4\ln x)]$ ،

.105 $y=c_1x^{-1/3}+c_2x^{-1/3}\ln x$ ،

.107 $y=x^{-2}[c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)]$ ،

.109 $y = x^3[c_1\cos(\sqrt{6}\ln x) + c_2\sin(\sqrt{6}\ln x)]$ ،

.111 $y = c_1x^{-1} + c_2x + \frac{11}{6}x^2$ ، **.113** $y = c_1x + c_2x\ln x + x^2$ ،

.115 $y = c_1x + c_2x\ln x + c_3x(\ln x)^2$ ، **.117** $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^{-3}$ ،

.119 $y = \cos(\ln x) + 2\sin(\ln x)$.

تمارين الفصل السادس:

.1 $x(t) = 2\cos 2t + 2\sin 2t$ ، **.3** $x(t) = e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t)$ ،

.5 $x(t) = -e^{-t} + te^{-t}$ ، **.7** $x(t) = 4e^{-t/2} + te^{-t/2}$ ،

.9 $x(t) = e^{-\sqrt{2}\,t}[3\cos\sqrt{6}\ t + (\sqrt{3} - \sqrt{2/3})\sin\sqrt{6}\ t]$ ،

.11 $x(t) = \frac{8}{\sqrt{7}}e^{-t}\sin(\sqrt{7}\ t + 1.696)$ ، **.13** $x(t) = e^{-t}(\cos\sqrt{7}\ t + \frac{5}{7}\sin\sqrt{7}\ t)$ ،

.15 $x(t) = \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-8t}$ ،

.17 $x(t) = e^{-t/2}(\frac{-4}{3}\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t + \frac{64}{3\sqrt{47}}\sin\frac{\sqrt{47}}{2}t) + \frac{10}{3}(\cos 3t + \sin 3t)$ ،

.19 $x(t) = \frac{-1}{2}\cos 4t + \frac{9}{4}\sin 4t + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t - 2e^{-2t}\sin 4t$ ،

.21 $q(t) = \frac{100}{13}\sin t + \frac{150}{13}\cos t,\ \ i(t) = \frac{100}{13}\cos t - \frac{150}{13}\sin t$ ،

.23 $i_p(t) = 4.160\ \ \sin(60t - 0.588)$.

تمارين الفصل السابع:

.1 $c_k = k!\ 2^k,\ \ a = 0$ ، **.3** $c_k = \frac{1}{k^3},\ \ a = 3$ ، **.5** $c_k = \frac{(-1)^k}{10^k},\ \ a = 5$ ،

.7 $\sum_{k=0}^{\infty}(2k+5)c_{k+3}x^k$ ، **.9** $\sum_{k=1}^{\infty}kc_{k-1}x^k$ ،

.11 $2c_1 + \sum_{k=1}^{\infty}[2(k+1)c_{k+1} + 6c_{k-1}]x^k$ ،

13. $|x+3|<2$ ، 15. $-\infty<x<\infty$ ، 17. لا توجد نقاط منفردة،

19. $x=-1$ نقطة منفردة،

21. $y_1=c_0[1+\frac{1}{3.2}x^3+\frac{1}{6.5.3.2}x^6+...],\ y_2=c_1[x+\frac{1}{4.3}x^4+\frac{1}{7.6.4.3}x^7+...]$ ،

23. $y_1=c_0[1-\frac{1}{2!}x^2-\frac{3}{4!}x^4+...],\ y_2=c_1[x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{5}{5!}x^5+...]$ ،

25. $y_1=c_0[1-\frac{1}{3!}x^3+\frac{4^2}{6!}x^6+...],\ y_2=c_1[x-\frac{2^2}{4!}x^4+\frac{5^2}{7!}x^7+...]$ ،

27. $y_1=c_0,\quad y_2=c_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ ،

29. $y_1=c_0\{1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+...,\ y_2=c_1\{x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+...$ ،

31. $x=0$ منتظمة، 33. $x=0,\ 2$ منتظمة، 35. $x=0$ منتظمة، $x=1$ غير منتظمة،

37. $x=1,\ -2$ منتظمة، 39. $x=0,\ 2i,\ -2i$ منتظمة،

41. $y(x)=c_1x^{\frac{3}{2}}[1-\frac{2}{5}x+\frac{2^2}{7.5.2}x^2-...]+c_2[1+2x-2x^2+...]$ ،

43. $y(x)=c_1x^{\frac{7}{8}}[1-\frac{2}{15}x+\frac{2^2}{23.15.2}x^2-...]+c_2[1-2x+\frac{2^2}{9.2}x^2+...]$ ،

45. $y(x)=c_1x^{\frac{1}{3}}[1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3^2.2}x^2+...]+c_2[1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{5.2}x^2+...]$ ،

47. $y(x)=c_1x^{\frac{5}{2}}[1+\frac{2.2}{7}x+\frac{2^2.3}{9.7}x^2-...]+c_2[1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}x^2+...]$ ،

49. $y(x)=c_1x^{\frac{2}{3}}[1-\frac{1}{2}x+\frac{5}{28}x^2-...]+c_2x^{\frac{1}{3}}[1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}x^2+...]$.

تمارين الفصل الثامن:

.1 $\frac{e}{s+1}$ ، **.3** $\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$ ، **.5** $\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}-e^{-2s}[\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}]$ ،

.7 $\frac{2e^{-3s}+e^{-s}-1}{s}$ ، **.9** مستمرة وذات رتبة أُسية، **11 .** مستمرة وذات رتبة أُسية،

.13 ذات اتصال متقطع لكنها ليست ذات رتبة أُسية، **.15** $\frac{5!}{s^6}$ ،

.17 $\frac{2s}{s^2+9}-\frac{6}{s^2+4}$ ، **.19** $\frac{1}{s-2}-\frac{2}{s}+\frac{1}{s+2}$ ، **.21** $\frac{1}{2}[\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s}]$ ،

.23 $\frac{2s}{s^2-1}-\frac{10}{s^2-4}$ ، **.25** $\frac{e^{-t/2}}{2}$ ،

.27 لا يوجد تحويل لابلاس العكسي لأن $\lim_{s\to\infty} F(s)\neq 0$ ، **.29** $2\sqrt{\pi}\ t^{-1/2}$ ،

.31 $\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$ ، **.33** $\frac{s}{s^2+1}[1-e^{-\pi s}]$ ، **.35** $\frac{2}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{2e^{-4s}}{s}$ ،

.37 $T=2,\ \frac{e^{-2s}-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})}$ ، **.39** $T=\pi,\ \frac{1-2se^{-\pi s/2}-e^{-\pi s}}{(1+s^2)(1-e^{-\pi s})}$ ،

.41 $\frac{1}{6}[5e^{-5t}+e^{t}]$ ، **.43** $\frac{1}{4}[1+3e^{4t}]$ ، **.45** $1-e^{-t}$ ،

.47 $\frac{1}{2}(t-1)^2U_1(t)$ ، **.49** $\frac{1}{6}(t-2)^3e^{-2(t-2)}U_2(t)$ ،

.51 $y=2-2e^{-t}$ ، **.53** $y=te^{t}-e^{t}+1$ ،

.55 $y=\frac{1}{10}[-2\sin(3t)+3\sin(2t)]$ ، **.57** $y=\frac{1}{4}e^{-3t}[8\cos 4t-21\sin 4t]$ ،

.59
$$y=\begin{cases}\frac{1}{4}(1-\cos 2t)-\frac{1}{2}\sin 2t & ,\ 0\le t<1\\ \cos 2(t-1)-\frac{1}{4}\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t & ,\ 1\le t\end{cases}$$ ،

.61
$$y=\begin{cases}\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t) & ,\ 0\le t<2\pi\\ 0 & ,\ 2\pi\le t\end{cases}$$ ،

.63 $y=\begin{cases} \sin t - t\cos t & , \ 0\le t<\pi \\ -\pi\cos t & , \ \pi\le t<2\pi \\ \sin t - t\cos t + \pi\cos t & , \ 2\pi\le t<3\pi \\ -2\pi\cos t & , \ 3\pi\le t<4\pi \end{cases}$ ،

.65 $y=\dfrac{1}{2}\sin 2t$ ،

.67 $y=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin 2t & , \ 0\le t<\pi \\ \sin 2t & \pi\le t \end{cases}$ ،

.69 $\dfrac{s^2+1}{(s^2-1)^2}$ ،

.71 $\dfrac{-6(1-4s^2)}{(s^2+9)^3}$ ،

.73 $t\sin t$ ،

.75 $e^{-s}-e^{-\pi s}$ ،

.77 $6\sinh t - t^3 - 6t$ ،

.79 $2(e^t-1)-t^2-2t$ ،

.81 $f(t)=\dfrac{1}{8}e^t+\dfrac{3}{4}te^t+\dfrac{1}{4}t^2e^t-\dfrac{1}{8}e^{-t}$ ،

.83 $f(t)=\dfrac{3}{8}e^{2t}+\dfrac{1}{8}e^{-2t}+\dfrac{1}{2}\cos 2t+\dfrac{1}{4}\sin 2t$ ،

.85 $f(t)=te^{-3t}$.

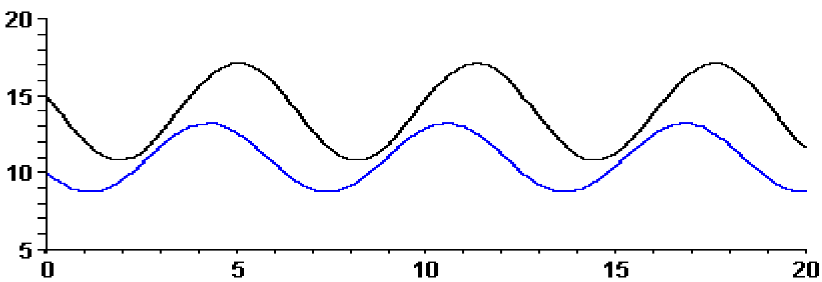
تمارين الفصل التاسع:

.1 $\begin{aligned} y_1' &= y_2 & , \ y_1(0)=1 \\ y_2' &= 2y_2+\dfrac{3}{x}y_1 & , \ y_2(0)=0 \end{aligned}$ ،

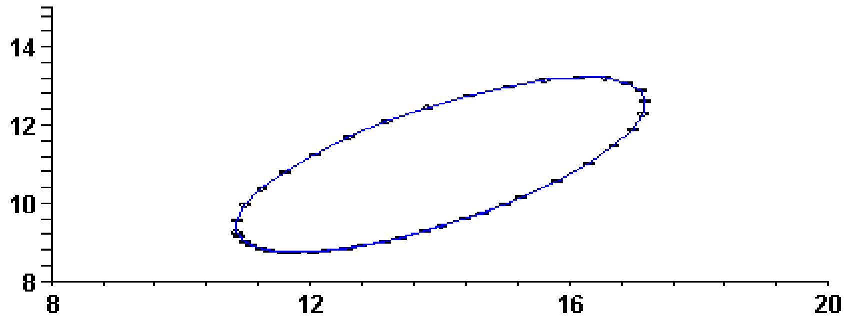
.3 $\begin{aligned} y_1' &= y_2 & , \ y_1(0)=0 \\ y_2' &= \dfrac{2}{x}y_2+\dfrac{3}{x^2}y_1+\dfrac{1}{x^2}e^x & , \ y_2(0)=1 \end{aligned}$ ،

.5 $\begin{aligned} x' &= 2x-y_1-2t & , \ x(0)=2 \\ y_1' &= y_2 & , \ y_1(0)=1 \\ y_2' &= 5x-2y_1-y_2+t^2 & , \ y_2(0)=3 \end{aligned}$ ،

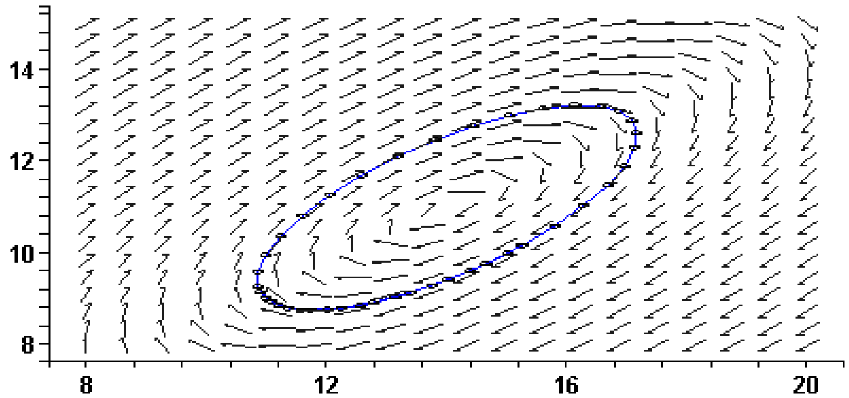
.7 أ-



ب-



ت-



.9 نعم لأن $W(y_1, y_2, y_3) = -1 \neq 0$ عند $x = 0$ ،

.11 نعم لأن $W(y_1, y_2, y_3) \neq 0$ عند $x = 0$ ،

.13 $AY_p = \begin{bmatrix} 3\cos 3x \\ 0 \\ -3\sin 3x \end{bmatrix}$ ، **.15** $Y = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5x}$ ،

.17 $Y = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4x} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} e^{x}$ ،

.19 $Y = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x} + C_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} \right) e^{2x}$ ،

.21 $$Y=\frac{1}{5}e^{5x}\{C_1\begin{bmatrix}5\sin 3x\\ \sin 3x+3\cos 3x\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}5\cos 3x\\ -3\sin 3x+\cos 3x\end{bmatrix}\}$$ ،

.23 $$Y=C_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}e^{x}+C_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}e^{2x}$$ ،

.25 $$Y=\frac{1}{5}C_1\begin{bmatrix}-4\\0\\5\end{bmatrix}e^{2x}+\frac{1}{3}C_2\begin{bmatrix}-7\\3\\5\end{bmatrix}e^{5x}+\frac{1}{5}C_3\begin{bmatrix}-7\\5\\5\end{bmatrix}e^{7x}$$ ،

.27 $$Y=C_1\begin{bmatrix}-2\\0\\5\end{bmatrix}e^{5x}+C_2\begin{bmatrix}4/5\\1\\-2/5\end{bmatrix}+C_3\left(\begin{bmatrix}-4\\0\\2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)e^{5x}$$ ،

.29 $$Y=C_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}-\cos x\\ \cos x\\ \sin x\end{bmatrix}+C_3\begin{bmatrix}\sin x\\ -\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}$$ ،

.31 $$Y=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}e^{x/2}+\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}e^{-x/2}$$ ،

.33 $$Y=\begin{bmatrix}-3/2\\6\\-3/2\end{bmatrix}e^{x}+\begin{bmatrix}11/2\\0\\-11/2\end{bmatrix}e^{-x}$$ ،

.35 $$Y=C_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{4x}+C_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-2x}+\frac{1}{4}\{\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}x^2+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-8\\3\end{bmatrix}\}$$ ،

.37 $$Y=C_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}e^{x}+C_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}e^{2x}+\frac{1}{2}C_3\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}e^{5x}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\7\\2\end{bmatrix}e^{4x}$$ ،

.39 $y_1 = x - 1 + e^{-x}$ ، $y_2 = 0$

.41 $y_1 = \frac{-2}{3}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{6}e^{5x}$ ، $y_2 = \frac{2}{3}e^{-x} + \frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{12}e^{5x}$

تمارين الفصل العاشر:

.1 الحل الفعلي $y(x) = 2e^{x} - x - 1,\ \ y(2) = 11.78$ ،

الحلول العددية: $h = 1: y_0 = 1,\ \ y_1 = 2,\ \ y_2 = 5 \approx y(2)$

$$h = 0.5: y_0 = 1,\ \ y_1 = \frac{3}{2},\ \ y_2 = \frac{5}{2},\ \ y_3 = \frac{17}{4},\ \ y_4 = \frac{57}{8} \approx y(2)$$

.3 $y_4 = \frac{1}{48}x^5 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 1$ ، $y_4(2) = 11.67 \approx y(2) = 11.78$

يمكن الحصول على تقريب أفضل بزيادة درجة الحدودية.

.5 $x_0 = 1,\ \ x_1 = 1.5,\ \ x_2 = 2,\ \ y(2) = 0.5$

أ- طريقة أويلر الصريحة: $y_0 = 1,\ \ y_1 = 0.5,\ \ y_2 = 0.1805 \approx y(2) = 0.5$

ب- طريقة النقطة الوسطية: $y_0 = 1,\ \ y_1 = 1 - h + h^2 = 0.75,\ \ y_2 = 0.674 \approx y(2) = 0.5$

ت- طريقة رونكه - كوتا الصريحة ذات المرحلتين:

$$y_0 = 1,\ \ y_1 = 0.59,\ \ y_2 = 0.356 \approx y(2) = 0.5$$

ث- باستخدام طول الخطوة $h = 0.25$ **:** $x_0 = 1,\ \ x_1 = 1.25,\ \ x_2 = 1.50,\ \ x_3 = 1.75,\ \ x_4 = 2$

أويلر الصريحة: $y_0 = 1,\ \ y_1 = 0.75,\ \ y_2 = 0.57,\ \ y_3 = 0.43,\ \ y_4 = 0.31$

النقطة الوسطية: $y_0 = 1,\ \ y_1 = 1 - h + h^2 = 1.25,\ \ y_2 = 0.69,\ \ y_3 = 0.61,\ \ y_4 = 0.55$

رونكه – كوتا 2 : $y_0 = 1,\ \ y_1 = 0.79,\ \ y_2 = 0.64,\ \ y_3 = 0.53,\ \ y_4 = 0.45$

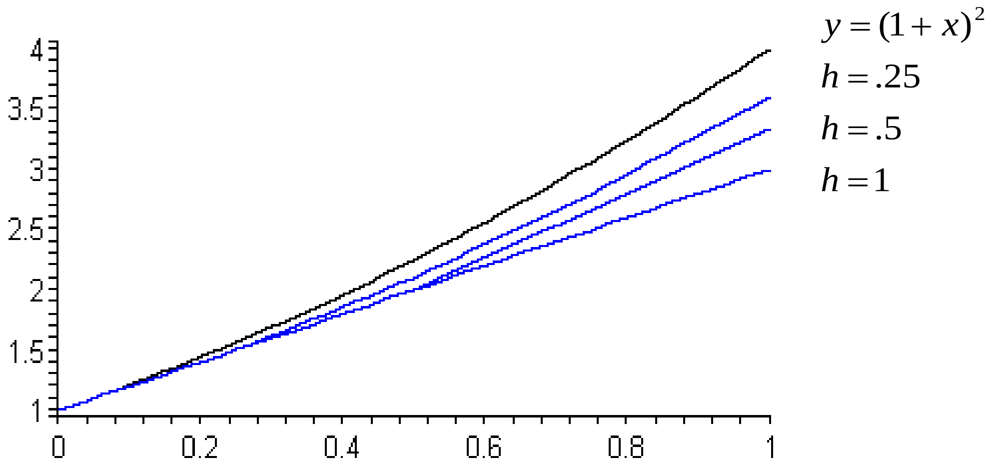
.7 $y_{n+1} = y_n(1 + \frac{2h}{nh+1}),\ \ n = 0,\ 1,\ 3,...$ ، **الحل الفعلي:** $y(x) = (1+x)^2$

أ- $h = 1: y_0 = 1,\ \ y_1 = 3 \approx y(1)$

$$h=\frac{1}{2}: y_0=1,\ \ y_1=2,\ \ y_2=\frac{10}{3}\approx y(1)$$

$$h=\frac{1}{4}: y_0=1,\ \ y_1=\frac{3}{2},\ \ y_2=\frac{21}{10},\ \ y_3=\frac{14}{5},\ \ y_4=\frac{18}{5}\approx y(1)$$

ب-



ت-

h	$y(1)$		
1	3		
1/2	10/3	11/3	
1/4	18/5	58/15	59/15

، $\frac{59}{15}$ **هو أفضل تقريب حصلنا عليه للقيمة الفعلية** $y(1)=\frac{1}{4}$

.9 الحل الفعلي: $y(x)=e^{-x^2/2}$ ،

الحل العددي بطريقة أويلر الصريحة: $y_{n+1}=y_n(1-nh^2)$ **.**

لاحظ تباعد الحل العددي $\{y_n\}$ **عندما** h **موجبة وثابتة ، بينما** $y(x)\to 0$ **عندما** $x\to\infty$ **.**

الحل العددي بطريقة أويلر الضمنية: $y_{n+1}=\frac{1}{1+(n+1)h^2}y_n$ **.**

لاحظ تناقص الحل العددي عندما h **موجبة وثابتة ، مما يجعله متماشٍ مع سلوك الحل الفعلي.**

.11 الحل العددي بطريقة أويلر الضمنية:

$$x_0=0,\ \ x_1=.5,\ \ x_2=1,\ \ y_{n+1}=y_n/(1+\frac{h}{1+h(n+1)})$$

$$h=.5: y_0=1,\ \ y_1=\frac{3}{4},\ \ y_2=\frac{3}{5}$$

الحل العددي بطريقة أويلر الصريحة: $y_{n+1} = y_n(1 - \frac{h}{1+(1+nh)})$ $x_0 = 1,\ x_1 = .5,\ x_2 = 0,$.

$$h = -.5 : y_0 = \frac{3}{5},\ y_1 = \frac{3}{4},\ y_2 = 1$$

نعم الطريقتان نظيرتان لبعضهما.

13. $x_0 = 0,\ x_1 = .5,\ x_2 = 1,\ f(x,y) = -2xy,\ y_0 = 5,\ y(x) = 5e^{-x^2}$

عدم تكرار التصحيح: $y_0 = 5,\ y_1 = 2.5,\ y_2 = 1.25 \approx y(1) = 1.839$

تكرار التصحيح مرتين: $y_0 = 5,\ y_1 = 3.75,\ y_2 = 1.875 \approx y(1) = 1.839$

15. $x_0 = 0,\ x_1 = .5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.5,\ x_4 = 2,\ y_0 = 5,\ y(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

أ- $y_0 = 1,\ y_1 = 1 - 2h + 3h^2 = .75,\ y_2 = 0,\ y_3 = .75,\ y_4 = -0.6$

ب- $y_0 = 1,\ y_1 = 0.444,\ y_2 = 0.407,\ y_3 = 0.037,\ y_4 = 0378$

ت- بما ان فترة الاستقرارية المطلقة لطريقة النقطة الوسطية خالية فإنَ أي اختيار لطول الخطوة h **يتعارض مع شرط الاستقرارية المطلقة للطريقة.**

17. الحل الفعلي $y(x) = \frac{2}{3+x^2}$ ، $y_1 = y(1.5)$ ،

بعدم تكرار التصحيح ($m=1$**) :**

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	$M\ Err$	$True\ Err$
0	1.0	.5	.5		0
1	1.5	.38095	.38095		0
2	2.0	.28728	.28571	.00127	.00156
3	2.5	.21634	.21622	.00028	.00012
4	3.0	.16545	.16667	.00079	.00122

بتكرار التصحيح مرتين ($m=2$**):**

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	$M\ Err$	$True\ Err$
0	1.0	.5	.5		.0
1	1.5	.38095	.38095		.0
2	2.0	.28527	.28571	.00091	.00045
3	2.5	.21529	.21622	.00034	.00052
4	3.0	.16616	.16667	.00054	.00051

19. بعدم تكرار التصحيح ($m=1$) :

x_n	y_n	$M\ Err$	$True\ Err$
1.0	.5		
1.5	.38095		
2.0	.28571		
2.5	.21622		
3.0	.16765	.00039	.00099

بتكرار التصحيح مرتين ($m=2$):

x_n	y_n	$M\ Err$	$True\ Err$
1.0	.5		
1.5	.38095		
2.0	.28571		
2.5	.21622		
3.0	.16661	.00032	.00005

.21 $x_0 = x(0) = 1,\ \ y_0 = y(0) = 1,\ \ h = 0.4$

باستخدام طريقة أويلر الصريحة:

n	t_n	x_n	y_n	$x_n\ Err$	$y_n\ Err$
1	0.4	1.200	.800	.017	.045
2	0.8	1.360	.681	.018	.064
3	1.2	1.496	.599	.013	.075
4	1.6	1.616	.538	.004	.082
5	2.0	1.724	.491	.008	.086

باستخدام طريقة رونكه – كوتا الصريحة ذات المرحلتين:

n	t_n	x_n	y_n	$x_n\ Err$	$y_n\ Err$
1	0.4	1.220	.811	.037	.034
2	0.8	1.398	.702	.057	.043
3	1.2	1.553	.628	.069	.047
4	1.6	1.691	.573	.078	.048
5	2.0	1.817	.529	.085	.048

.23 $x(2)=3$ و $y(2)=4$

h	t_n	x_n	y_n	x_{n1}	y_{n1}	x_{n2}	y_{n2}
1	2	3	3				
.5	2	2.95	3.45	2.90	3.9		
.25	2	2.962	3.712	2.974	3.974	2.999	3.999

.25 $x_0=x(0)=1,\ \ y_0=y(0)=1,\ \ h=0.5$

$$x_2=1.875\approx x(1)=2,\ \ y_2=4.292\approx y(1)=4$$

.27 $x_0=x(0)=0,\ \ y_0=y(0)=0,\ \ h=0.5$

$$x_2=0.914\approx x(1)=1,\ \ y_2=0.914\approx y(1)=1$$

باستخدام الطريقة مع $h=1$ **نحصل على:** $x_1^*=1.0\approx x(1)=1,\ \ y_1^*=0.5\approx y(1)=1$

استكمال ريجاردسون لتخمين الخطأ: $x_2R\ \ Err=0.03,\ \ y_2R\ \ Err=.14$

الخطأ الفعلي: $x_2T\ \ Err=0.086\ \ y_2T\ \ Err=.086$

.29 **كتابة مسألة القيمة الابتدائية بصيغة منظومة قيم إبتدائية ثم استخدام طريقة أويلر الصريحة للحصول على:**

t_n :	0	.1	.2	.3	.4	.5
x_n :	0	.1	.18	.243	.2916	.3281
$x(t_n)$:	0	.09	.164	.222	.2681	.30326