الفصل الأول

مفاهيم واصطلاحات (Preliminary and terminology)

تؤدي المعادلات التفاضلية دوراً مهماً في حياتنا اليومية وفي تفسير بعض قوانين الظواهر الطبيعية والعمل على حل مشكلاتها. فهي تسهم بشكل أساسي في إيجاد حلول لبعض المسائل في الرياضيات والفيزياء والهندسة والكيمياء وعلوم الحياة والطب والاقتصاد، وبقية العلوم الأخرى. وتعدّ حلقة وصل بين الرياضيات والعلوم الأخرى وهي متقدمة على بقية العلوم بدليل إن حلول بعض المعادلات التفاضلية المكتشفة في القرون السابقة تسهم في حل مسائل معاصرة في العلوم الاخرى. مع هذا إنّ تاريخ بداية المعادلات التفاضلية يعود الى القرن السابع عشر الميلادي حينما استطاع اسحاق نيوتن (Isaac Newton) سنة 1665م في بريطانيا، وجوتفرد لايبنز (Gottfried Leibniz) سنة 1673م في المانيا اكتشاف مفهوم المشتقة التي أدت بدورها الى تطوير حسبان التفاضل والتكامل ثم المعادلات التفاضلية.

سنفترض أنّ القارىء يلمَّ بشكل جيد بأوليات الكتاب خاصة حسبان التفاضل والتكامل، ويتقن قواعد الاشتقاق وطرائق التكامل المعروفة، مثل: التكامل بالاجزاء والتكامل بتجزئة الكسور، والتكامل باستخدام التعويض بالدوال المثلثية،... وغيرها.

في هذا الفصل سنتناول التعريفات والمفاهيم الأساسية للمعادلات التفاضلية وأنواعها وطرائق تصنيفها.

1.1 أنواع المعادلات التفاضلية (Types of differential equations)

المعادلة التفاضلية هي معادلة تحوي على متغير معتمد واحد ومشتقاته بالنسبة الى متغير مستقل واحد أو أكثر، وتقسم بشكل رئيس على ثلاثة أقسام: اعتيادية وجزئية، وكسرية.

1.1.1 معادلات تفاضلية اعتيادية (Ordinary differential equations)

هي معادلات تحوي متغيراً مستقلاً واحداً فقط. سنتناول في هذا الكتاب المعادلات التفاضلية الاعتيادية فقط ، وسوف نعبّر عنها بالقول معادلة تفاضلية ونرمز لها بالرمز (DE)، أمثلة على ذلك:

1. $$\frac{dy}{dx} = -ky$$

2. $$m\frac{d^2y}{dx^2} = -ky$$

3. $$\frac{dy}{dt} + 2ty = e^{-t^2}$$

4. $$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0$$

5. $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+p(p+1)y=0$$

6. $$\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+2y=0$$

إنّ المتغير المعتمد في المعادلات السابقة هو y ، والمتغيرالمستقل هو إما x أو t. والحروف k وm، و p هي ثوابت. وإنّ $\frac{dy}{dx}$ هي المشتقة الاعتيادية للمتغير y بالنسبة الى x ، ويرمز إليها أحياناً y' .

نلاحظ أنّ المعادلة: $x^2+2x-3=0$ ليست معادلة تفاضلية لأنها لا تحتوي على مشتقة. وتدعى المعادلة المذكورة بالمعادلة الجبرية.

1.1.2 معادلات تفاضلية جزئية (Partial differential equations)

تعود بدايات المعادلات التفاضلية الجزئية الى العالم الفرنسي لابلاس (Laplace) خلال الفترة 1749-1827م والذي سيرد ذكره في الفصل الثامن حين تناول المعادلات المقرونة باسمه. إنّ المعادلات التفاضلية الجزئية (PDE) تحتوي على الاشتقاق الجزئي، وهو موضوع مستقل بحد ذاته وليس محور اهتمامنا في هذا الكتاب، ولها تطبيقات مهمّة في الفيزياء والهندسة والعلوم الأخرى، ومن الأمثلة عليها:

1. $$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}$$

2. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial u}{\partial t}$$

3. $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$$

4. $$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial t}$$

5. $$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

حيث إنّ $\frac{\partial u}{\partial x}$ تعني المشتقة الجزئية للمتغير u بالنسبة الى المتغير x.

كل من المعادلات الثلاث (3 و4 و5) السابقة تعرف بمعادلة لابلاس (Laplace's equation) وتسمى (4) بمعادلة الحرارة، و (5) بمعادلة الاهتزاز، وتؤديان دوراً مهما في الفيزياء.

1.1.3 معادلات تفاضلية كسرية (Fractional differential equations)

هي المعادلات التي تكون فيها المشتقات كسرية (عدد كسري او أي عدد حقيقي)، ويرمز لها بالاختصار

(FDE)، أي على سبيل المثال: المعادلة التفاضلية الكسرية :

$$\frac{d^{\alpha} y}{dx^{\alpha}} = f(x, y), \qquad \alpha \in \Re = (-\infty, \infty)$$

حيث إنّ α أي عدد حقيقي (α عدد صحيح أو غير صحيح، سالب أو موجب). إنّ هذا يعد من الموضوعات المتقدمة، وغالباً ما يعطى لطلبة الدراسات العليا أو يستخدم في إجراء بحوث متقدمة، وتعود بدايته الى الرياضي الألماني لايبنز (Leibniz) الذي أرسل رسالة من هانوفر في المانيا سنة 1695م الى لوبيتال (L'Hospital) في سويسرا يذكر فيها المشتقة الكسرية النصفية. في حين أنّ أول تعريف كامل للمشتقة الكسرية اشترك في و ضعه ليوفيل (Liouville) سنة 1832م و ريمان (Riemann) سنة 1853م ، ويسمى باسميهما (تعريف ليوفيل – ريمان). ومن أوائل الرياضيين العرب الذين أسهموا في وضع أساسيات هذا الموضوع وتطوير مبرهناته العراقي محمد علي البصام (1923 – 2001م). وسنكتفي بأعطاء اسم كتاب وعناوين بحوث متعلقة بهذا الموضوع في قائمة المصادر.

وفي أدناه نماذج من (FDE) :

1. $\frac{d^{\alpha} y}{dx^{\alpha}} = x^{\alpha - 1}\, y$ ،

2. $\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dt^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, t$ ،

3. $\frac{d^{-\frac{1}{2}} y}{dx^{-\frac{1}{2}}} = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}\, x^2$

1.2 الصيغة القياسية للمعادلة التفاضلية (Standard form of DE)

سنتعرف في هذا البند على الصيغة القياسية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية من خلال التعريف الآتي:

التعريف (1.1): تعرّف المعادلة التفاضلية بأنها دالة تحوي المتغير المستقل والمتغير المعتمد ومشتقاته الاعتيادية:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \qquad (1.1)$$

حيث إنّ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}$ هي المشتقات الاعتيادية.

وتكتب المعادلة التفاضلية أحياناً

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

حيث إنّ y' تعني المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ ، و y'' تعني المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، و $y^{(n)}$ تعني المشتقة النونية .

على سبيل المثال إنّ المعادلة التفاضلية التي تحتوي على المشتقة الأولى فقط التي سنسميها لاحقا من الرتبة الأولى هي:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \qquad (1.2)$$

المعادلة (1.2) ستنال اهتماماً كبيراً في الفصل الثاني من هذا الكتاب.

كحالة خاصة من المعادلة (1.2) هي: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$ ، حيث إنّ $p(x)$ و $f(x)$ دالتان تعتمدان على المتغير المستقل x، والتي سيطلق عليهما بالمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى لاحقاً.

1.3 حلول المعادلات التفاضلية ومجالها

(Solutions of differential equations and its domain)

لقد ورد استخدام مفهوم حل المعادلات التفاضلية أول مرة سنة 1695م من قبل العالم الرياضي جوهان برنولي (J. Bernoulli) وقصد به مكامل المعادلة التفاضلية (Integral of the DE). واستخدمه فيما بعد العالم الرياضي لاجرانج (Lagrange) سنة 1774م، كما جاء في أحد مؤلفات بونكاريه (Poincare')، والعالم أويلر (Euler) سنة 1768م الذي كان يقصد به "مكامل خاص" للمعادلة التفاضلية (Particular integral of the DE).

إنّ أحد الأهداف الرئيسة في هذا الكتاب هو: إيجاد الحل، أو : حل المعادلة التفاضلية. وقبل التعرف على طرائق الحل، علينا معرفة ما هو حل المعادلة التفاضلية؟ وهل كل معادلة تفاضلية لها حل؟ وهل الحل وحيد؟ هذا ما سنحاول الإجابة عنه لاحقاً في هذا الفصل.

التعريف (1.2): يعرّف حل المعادلة التفاضلية (1.1) بانه دالة حقيقية f بالمتغير المستقل x والمتغير المعتمد y معرفة على فترة I الجزئية من الأعداد الحقيقية $\Re$، لها مشتقات متصلة لا تقل عن الرتبة n، وتحقق المعادلة التفاضلية (1.1). وتكتب بشكل عام بالصيغة :

$$y = f(x) \qquad (1.3)$$

إنّ الفترة I قد تكون فترة مفتوحة مثل (a,b) أو فترة مغلقة مثل $[a,b]$ أو تكون غير منتهية مثل (a,∞). وقد تكون جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re=(-\infty,\infty)$ او نفسها؛ أو اتحاد فترات جزئية من $\Re$. الفترة I في التعريف السابق لها عدة تسميات منها:

فترة التعريف (Interval of definition)، فترة الوجود (Interval of existence)، أو مجال الحل (Domain of solution).

سوف نعطي الآن بعض الأمثلة على معادلات تفاضلية مع حلها (إن وجد) دون إعطاء تفاصيل عن كيفية إيجاد الحل، لأن ذلك من مهمة الفصول القادمة في الكتاب.

الأمثلة (1):

1. **المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx}=2x$ لها حل هو: $y=x^2+c$ معرف على الفترة $\Re=(-\infty,\infty)$ لأي ثابت اختياري c، لإنّ الحل قابل للاشتقاق ويحقق المعادلة التفاضلية المعطاة على تلك الفترة. أي إنّ تعويض مشتقة الحل في المعادلة التفاضلية يؤدي الى الحصول على معادلة صادقة.**

2. **المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$ لها حلاّن هما: $x_1=\cos t+c_1$ و $x_2=\sin t+c_2$ على الفترة $\Re=(-\infty,\infty)$ حيث c_1 و c_2 ثابتان اختياريان. ولتحقيق ذلك نحسب المشتقة الثانية لكلا الحلين، ونعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة، فنجد انها تتحقق على تلك الفترة المعطاة.**

3. **المعادلة التفاضلية: $(\frac{dy}{dx})^2+1=0$ ليس لها حل على أية فترة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re=(-\infty,\infty)$ لعدم وجود دالة $y=f(x)$ تحقق المعادلة المعطاة على تلك الفترة. أي لا توجد دالة حقيقية أو مقدار جبري يرفع للأس 2 ثم يضاف اليه العدد 1 فيصبح صفراً.**

4. **المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2y}{dx^2}+y^2=0$ لها حل واحد فقط ، هو $y\equiv 0$.**

ملاحظات:

في الأمثلة السابقة، نلاحظ في المثال الأول أنّ الحل موجود وهو وحيد، أما في المثال الثاني فالحل موجود أيضاً ولكنه ليس وحيداً، في حين أن المعادلة التفاضلية في المثال الثالث ليس لها حل والمعادلة التفاضلية في المثال الرابع لها حل وحيد هو الصفر.

نلاحظ من التعريف (1.2) أنّ الشرط: "الحل معرف على الفترة I الجزئية من الأعداد الحقيقية $\Re$ له مشتقات متصلة لا تقل عن الرتبة n"، يضمن لنا وجود الحل.

عندما لا نستطيع إيجاد حل المعادلة التفاضلية بالطرائق التحليلية نستخدم الطرائق العددية لإيجاد الحل، كما سنشاهد ذلك في الفصل العاشر.

يمكن تقسيم حلول المعادلات التفاضلية على ثلاثة أقسام: صريحة وضمنية، وصفرية، كما يأتي:

1.3.1 الحل الصريح (Explicit solution)

يسمى الحل (1.3) صريحاً اذا استطعنا كتابته بشكل صريح أي بصيغة: $y = f(x)$ على فترة التعريف I.

المثال (2): تحقق من أن الدالة: $y = \frac{1}{16}x^4$ هي حل صريح للمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = x\,y^{\frac{1}{2}}$ على الفترة $(-\infty,\infty)$.

الحل: لتحقيق ذلك نشتق الدالة ونعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على:

الطرف الأيسر: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{16}(4x^3) = \frac{1}{4}x^3$

الطرف الأيمن: $xy^{1/2} = x\,(\frac{1}{16}x^4)^{1/2} = x\,(\frac{1}{4}x^2) = \frac{1}{4}x^3$

بما أن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر لجميع قيم x التي تنتمي الى الفترة $(-\infty,\infty)$، إذن الدالة هي حل صريح للمعادلة التفاضلية.

المثال (3): تحقق من إنّ الدالة: $y = xe^x$ هي حل صريح للمعادلة التفاضلية: $y'' - 2y' + y = 0$ على الفترة $(-\infty,\infty)$.

الحل: لتحقيق ذلك نشتق الدالة مرتين نحصل على :

$$y' = xe^x + e^x \quad \text{و} \quad y'' = xe^x + 2e^x$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية فنحصل على:

الطرف الأيسر : $y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$

الطرف الأيمن :0

بما أن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر لجميع قيم x التي تنتمي الى الفترة $(-\infty, \infty)$، إذن الدالة هي حل صريح للمعادلة التفاضلية.

1.3.2 الحل الضمني (Implicit solution)

يعتبر الحل ضمنياً إذا كتب بشكل ضمني، أي بالصيغة $f(x, y) = 0$ على فترة التعريف I .

المثال (4): تحقق من أن العلاقة: $x^2 + y^2 = 1$ هي حل ضمني للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{على الفترة} \quad (-1\ ,\ 1)$$

الحل: باجراء المشتقة الأولى على العلاقة نحصل على: $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$

و بالقسمة على 2 ونقل الحد x الى الطرف الأيمن وإجراء التبسيط نحصل على المعادلة التفاضلية. إذن العلاقة تحقق المعادلة التفاضلية على الفترة المعطاة، لذلك فهي حل ضمني .

من جانب آخر وباجراء تبسيط على العلاقة نحصل على $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. وعليه إنّ الدالتين: $y_1 = +\sqrt{1-x^2}$ و $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$ تحققان العلاقة: $x^2 + {y_1}^2 = 1$ و $x^2 + {y_2}^2 = 1$ على التوالي، لذلك فهما حلان للمعادلة التفاضلية، تحقق من ذلك؟

1.3.3 الحل الصفري (Trivial solution)

يسمى الحل الذي يطابق الصفر، أي $y(x) \equiv 0$ على فترة التعريف I بـ "الحل الصفري". في الحقيقة إنّ تطبيقات المعادلات التفاضلية لا تتعامل مع الحلول الصفرية؛ لأن تلك الحلول في غالبيتها تصف ظواهرطبيعية وقوانين وحقائق.

ملاحظة: نلاحظ في المثالين السابقين (2) و (3)، أنّ $y = 0$ هو أيضاً حل لكل من المعادلتين التفاضليتين، وهذا هو الحل الصفري المذكور سابقاً ولذلك يهمل.

المثال (5):

الدالة ثنائية التعريف: $y=\begin{cases}-x^4 & , \quad x<0\\ x^4 & , \quad x\geq 0\end{cases}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $xy'-4y=0$

لأن مشتقة الدالة هي: $y'=\begin{cases}-4x^3 & , \quad x<0\\ 4x^3 & , \quad x\geq 0\end{cases}$ ، وعند التعويض في الطرف الأيسر للمعادلة التفاضلية المذكورة نحصل على الطرف الأيمن وهو **0**. إذن الدالة هي حل للمعادلة التفاضلية.

1.4 تصنيف المعادلات التفاضلية (Classification of differential equations)

سنتناول في هذا البند تصنيف المعادلات التفاضلية من حيث: الرتبة و الدرجة و الخطية، والتجانس، وسنهتم بالمعادلات التفاضلية الخطية بشكل خاص.

1.4.1 رتبة المعادلة التفاضلية (Order of DE)

سنبدأ بتعريف رتبة المعادلة التفاضلية

التعريف (1.3): تعرّف رتبة المعادلة التفاضلية (1.1) بأنها أعلى رتبة للمشتقات في المعادلة التفاضلية. فيقال إنّ المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية اذا كانت أعلى مشتقة في المعادلة هي المشتقة الثانية.

الأمثلة (1):

المعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx}-2\,xy=0$ هي من الرتبة الأولى لأنّ أعلى مشتقة هي الأولى.

المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2y}{dx^2}-3(\frac{dy}{dx})^4+5y=e^x$ من الرتبة الثانية لأنّ أعلى مشتقة هي الثانية .

المعادلة التفاضلية: $(\frac{d^3y}{dx^3})^2+3(\frac{dy}{dx})^4-5y=x$ من الرتبة الثالثة لأنّ أعلى مشتقة هي الثالثة.

المعادلة التفاضلية: $(\frac{d^4y}{dx^4})^3-5(\frac{d^2y}{dx^2})2+3y=xe^x$ من الرتبة الرابعة لأنّ أعلى مشتقة هي الرابعة.

المعادلة التفاضلية: $\frac{d^ny}{dx^n}-k\,y=0$ من الرتبة n لأنّ أعلى مشتقة هي n ، حيث إنّ k ثابت.

1.4.2 درجة المعادلة التفاضلية (Degree of DE)

سنتناول درجة المعادلة التفاضلية، نبدأ بالتعريف الآتي:

التعريف (1.4): تعرّف درجة المعادلة التفاضلية (1.1) بانها هي أس أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية. فيقال إنّ المعادلة التفاضلية من الدرجة الثالثة اذا كان أس أعلى مشتقة في المعادلة هو 3.

الأمثلة (2):

المعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx} - 2\,xy = 0$ **من الدرجة الأولى لأنّ أس أعلى مشتقة هو 1.**

المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2y}{dx^2} - 3(\frac{dy}{dx})^4 + 5y = e^x$ **من الدرجة الأولى لأنّ أس أعلى مشتقة هو 1 .**

المعادلة التفاضلية: $(\frac{d^3y}{dx^3})^2 + 3(\frac{dy}{dx})^4 - 5y = x$ **من الدرجة الثانية لأنّ أس أعلى مشتقة هو 2.**

المعادلة التفاضلية: $(\frac{d^2y}{dx^2})^3 - 5(\frac{dy}{dx})2 + 3y = xe^x$ **من الدرجة الثالثة لأنّ أس أعلى مشتقة هو 3.**

المعادلة التفاضلية: $\frac{d^ny}{dx^n} - k\;y = 0$ **، حيث ان** k **ثابت، هي من الدرجة الأولى لأنّ أس أعلى مشتقة هو 1.**

1.4.3: المعادلات التفاضلية الخطية (Linear DE)

إن الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n **هي:**

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1.4)$$

حيث إنّ $g(x)$ **،** $a_1(x)$ **،** $a_2(x)$**،...، و** $a_n(x)$ **هي دوال تحتوي على المتغير المستقل** x **أو ثوابت، أي لا تحتوي على المتغير المعتمد** y **، وأنّ** $a_n(x) \neq 0$ **. وأنّ** y **ومشتقاتها كافة مرفوعة للأس 1. نستنتج مباشرة أنّ المعادلة التفاضلية الخطية لأي رتبة هي من الدرجة الأولى.**

في حالة الرتبة الأولى إنّ المعادلة الخطية تصبح:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (1.5)$$

حيث إنّ $a_1(x) \neq 0$ **. وبالقسمة على** $a_1(x)$ **نحصل على:** $\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$

وإذا فرضنا أن $\frac{a_0(x)}{a_1(x)} = p(x)$ و $\frac{g(x)}{a_1(x)} = f(x)$ فإنّ المعادلة السابقة تصبح:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \qquad (1.6)$$

المعادلة (1.6) تدعى بالمعادلة الخطية من الرتبة 1. في حالة الرتبة الثانية إنّ المعادلة الخطية تصبح:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (1.7)$$

حيث إنّ $a_2(x) \neq 0$. وبالقسمة على $a_2(x)$ نحصل على:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = \frac{g(x)}{a_2(x)},$$

وإذا فرضنا أن $\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = P(x)$ ، $\frac{a_0(x)}{a_2(x)} = Q(x)$ ، و $\frac{g(x)}{a_2(x)} = f(x)$ فإنّ المعادلة السابقة

تصبح:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x) \qquad (1.8)$$

المعادلة (1.8) تدعى بالمعادلة الخطية من الرتبة الثانية .

الأمثلة (3):

1. المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} - 2\,xy = 0$ خطية من الرتبة الأولى.

2. المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2y}{dx^2} - (\frac{dy}{dx})^4 + y = e^x$ غير خطية لأن المشتقة الأولى مرفوعة للأس 4.

3. المعادلة التفاضلية : $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx} - 5y = 0$ خطية من الرتبة الثالثة.

4. المعادلة التفاضلية: $(\frac{d^4y}{dx^4})^3 - 5(\frac{d^2y}{dx^2}) + 3y = xe^x$ غير خطية لأن المشتقة الرابعة مرفوعة للأس 3 .

5. المعادلة التفاضلية : $\frac{d^ny}{dx^n} - k\,y = 0$ خطية من الرتبة n، حيث إنّ k ثابت.

نلاحظ في الأمثلة السابقة أنّ المعادلات التفاضلية التي تناولناها هي خطية بالنسبة للمتغيرالمعتمد y ومشتقاته ، أي اعتبرنا المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y . في حين سنواجه معادلات تفاضلية خطية أو غير خطية، فيها المتغيرات ليست x و y ، على سبيل المثال:

الأمثلة (4):

1. المعادلة التفاضلية : $\frac{dx}{dt}-3x=t$ خطية بالمتغير x. في هذا المثال المتغير المستقل t والمتغير المعتمد x.

2. المعادلة التفاضلية : $\frac{d^2x}{dy^2}-y\frac{dx}{dy}+3x=e^y$ خطية بالمتغير x. في هذا المثال المتغير المستقل y والمتغير المعتمد x.

3. المعادلة التفاضلية : $\frac{dr}{d\theta}-3r=\sin\theta$ خطية بالمتغير r. في هذا المثال المتغير المستقل θ والمتغير المعتمد r.

4. المعادلة التفاضلية : $\omega^2\frac{d^2Q}{d\omega^2}+\omega\frac{dQ}{d\omega}-2Q=0$ خطية بالمتغير Q. في هذا المثال المتغير المستقل ω والمتغيرالمعتمد Q .

المثال (5):

المعادلة التفاضلية $x\frac{dy}{dx}+y^2=1$ غير خطية بالنسبة الى y لأنها تحتوي على y^2. ولكن بعد اجراء تعديل على المعادلة المعنية لتصبح $(y^2-1)\frac{dx}{dy}+x=0$. عندئذٍ تكون خطية بالنسبة الى x ومشتقاتها.

1.4.4 المعادلات التفاضلية المتجانسة (Homogeneous DE)

التعريف (1.5): تسمى المعادلة التفاضلية الخطية (1.4) متجانسة اذا كان الطرف الأيمن، بعد تبسيط المعادلة التفاضلية وجعل الحدود التي تحتوي على y ومشتقاتها كافة في الطرف الأيسر، يساوي صفراً. خلاف ذلك تسمى غير متجانسة، إذا كان الطرف الايمن، بعد إجراء التبسيط ونقل الحدود التي تحتوي على y ومشتقاتها كافة الى الطرف الأيسر، لا يساوي صفراً.

الأمثلة (6):

1. المعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx}-2\,xy=0$ **خطية متجانسة لأن الطرف الأيمن يساوي صفراً.**

2. المعادلة التفاضلية : $\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+5y=e^x$ **خطية غير متجانسة لأن الطرف الأيمن لا يساوي صفراً.**

3. المعادلة التفاضلية : $\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{dy}{dx}-5y=\sin x$ **خطية غير متجانسة لأن الطرف الأيمن لا يساوي صفراً.**

4. المعادلة التفاضلية: $\frac{d^4y}{dx^4}-5x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3xy=xe^x$ **خطية غير متجانسة لأن الطرف الأيمن لا يساوي صفراً.**

5. المعادلة التفاضلية : $\frac{d^ny}{dx^n}-k\,y=0$ **خطية متجانسة لأن الطرف الأيمن يساوي صفراً ، حيث ان k ثابت.**

ملاحظات:

1. المعادلة (1.6) تدعى بالمعادلة الخطية من الرتبة الأولى وهي غير متجانسة في حالة كون الطرف الأيمن $f(x)$ لا يساوي صفراً، وتدعى متجانسة اذا كان الطرف الأيمن $f(x)$ يساوي صفراً.

2. المعادلة (1.8) تدعى بالمعادلة الخطية من الرتبة الثانية وهي غير متجانسة في حالة كون الطرف الأيمن $f(x)$ لا يساوي صفراً، وتدعى متجانسة اذا كان الطرف الأيمن $f(x)$ يساوي صفراً.

الأمثلة (7):

صنف المعادلات التفاضلية الآتية من حيث : الرتبة والدرجة ، والخطية:

ت	المعادلة التفاضلية	الرتبة	الدرجة	خطية
1	$(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}-4xy=\sin x$	**1**	**1**	**نعم**
2	$x\,(y'')^4-(y')^2+y=0$	**2**	**4**	**لا**
3	$x(y')^3+3xy^2=x$	**1**	**3**	**لا**
4	$\dfrac{d^2I}{dt^2}+10^{-4}\dfrac{dI}{dt}-100\,I=0$	**2**	**1**	**نعم**
5	$(\sin\theta)\dfrac{d^3y}{d\theta^3}-(\cos\theta)\dfrac{dy}{d\theta}=2e^y$	**3**	**1**	**لا**
6	$y''=\sqrt{1+(y')^4}$	**2**	**2**	**لا**
7	$y^{(n)}-3xy=0$	n	**1**	**نعم**

ملاحظة: قبل إجراء التصنيف نضع المعادلة بصيغتها العامة ويتم إجراء تعديل عليها عندما تحتاج المعادلة الى تبسيط ونقل بعض الحدود كما في (6) من الأمثلة (7) سابقاً.

الأمثلة (8):

صنف المعادلات التفاضلية الخطية الآتية من حيث : الرتبة والتجانس:

ت	المعادلة التفاضلية	الرتبة	متجانسة
1	$(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}-4xy=\sin x$	**1**	**لا**
2	$x\,y''-y'+y=0$	**2**	**نعم**
3	$x^3y'''+3x^2y''-xy'+y=x$	**3**	**لا**
4	$\dfrac{d^2I}{dt^2}+10^{-4}\dfrac{dI}{dt}-100\,I=0$	**2**	**نعم**

لا	3	$(\sin\theta)\dfrac{d^3y}{d\theta^3}-(\cos\theta)\dfrac{dy}{d\theta}=2e^{\theta}$	5
نعم	n	$y^{(n)}-3xy=0$	6

1.5 رسم حلول المعادلات التفاضلية (Graph of solutions of DE)

نتناول في هذا البند رسم حل المعادلة التفاضلية، ونحاول أن نميز بين مفهومين أساسيين، هما رسم منحني الحل و رسم منحني الدالة التي تحقق المعادلة التفاضلية. سنبدأ باعطاء تعريف.

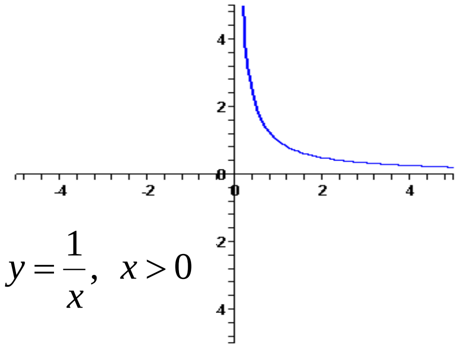
التعريف (1.6): يدعى رسم الحل $y=f(x)$ للمعادلة التفاضلية (1.1) بـ "منحني الحل" (Solution curve) ، حيث إنّ الدالة f يجب أن تكون قابلة للاشتقاق وبالتالي فإنها متصلة على فترة التعريف I .

فعليه هنالك فرق بين منحني الدالة f وبين منحني الحل f . أي يمكن أن يختلف مجال الدالة f عن مجال الحل، في كل الأحوال إنّ مجال الحل هو مجموعة جزئية من مجال الدالة أو تساويها . كما هو موضح في المثال الآتي:

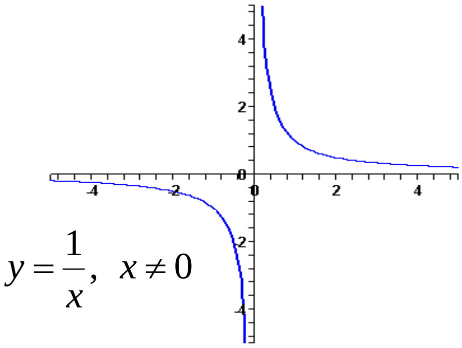
المثال (1):

تأمل الدالة $y=\dfrac{1}{x}$ التي مجالها جميع الأعداد الحقيقية باستثناء العدد 0، أي: مجال الدالة يساوي $\{x: x\in\Re, x\neq 0\}$ كما في الشكل (1.1). في حين أن $y=\dfrac{1}{x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية: $xy'+y=0$ على أية فترة لا تحوي 0، على سبيل المثال الفترة: $I=(0,\infty)$ ، كما في الشكل (1.2). إذن مجال الدالة $y=\dfrac{1}{x}$ هو $\{x: x\in\Re, x\neq 0\}$ لا يساوي مجال الحل $I=(0,\infty)$.

لذلك فهناك فرق بين منحني الدالة ومنحني الحل، ومن المناسب جداً أن نأخذ مجال الحل أوسع ما يمكن، كما هو موضح في الشكلين الآتيين:



الشكل (1.2)



الشكل (1.1)

المثال (2): ارسم منحني الحل $y=x^2$ للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى:

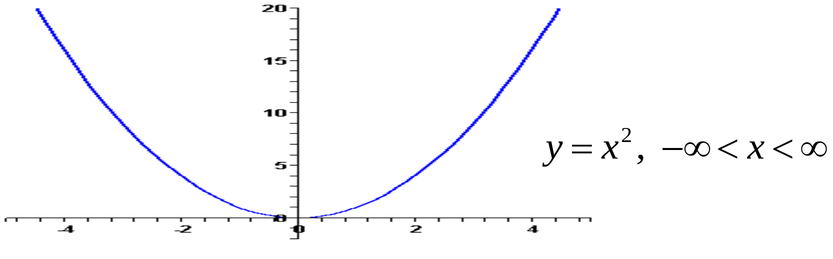
$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=3x$$ على الفترة $(-\infty,\infty)$.

الحل: يمكن التأكد بسهولة أنّ $y=x^2$ هو حل للمعادلة التفاضلية المذكورة على الفترة $\Re$ وهو مساوٍ لمجال الدالة، كما يأتي:

باشتقاق الحل نحصل على $\frac{dy}{dx}=2x$ وبالتعويض في الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=2x+\frac{1}{x}(x^2)=2x+x=3x$$

وهو يساوي الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية، إذن $y=x^2$ حل للمعادلة التفاضلية. ورسم منحني الحل في الشكل (1.3):



الشكل (1.3)

1.6 عائلة حلول المعادلات التفاضلية (Family of solutions of DE)

عند حل أية معادلة تفاضلية نستخدم عادة عملية التكامل غير المحدد (Antiderivative) ونحصل على الحل الذي يضم ثابت التكامل c، ولهذا يسمى الحل بالمكامل، كما اشرنا الى ذلك في البند (1.3).

ويؤدي هذا الثابت الاختياري c دوراً مهماً في حساب حلول المعادلات التفاضلية، ويسمى ثابت التكامل وهو اختياري؛ لأنه يختلف باختيار قيم مختلفة له.

فعند حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى:

$$F(x,y,y')=0 \qquad (1.9)$$

على فترة معطاة I، نحصل على حل يحتوي على هذا الثابت الاختياري c عند تلك الفترة. في الحقيقة فإنّ هذا الحل مع الثابت الاختياري يمثل عائلة حلول (Family of solutions) أو مجموعة حلول يمكن تمثيلها بالصيغة:

$$f(x,y,c)=0 \qquad (1.10)$$

وهذا يعني أنّ لهذه المعادلة التفاضلية عدداً غير منتهٍ من الحلول تختلف عن بعضها باختلاف قيم الثابت c . و تدعى مجموعة الحلول (1.10) بـ "عائلة الحلول بمَعْلَمَة واحدة" (One-Parameter family of solutions).

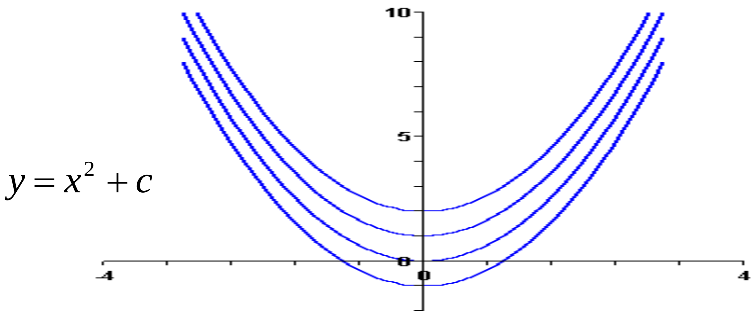
المثال (1): الدالة $y=x^2+c$ تمثل عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة للمعادلة التفاضلية الخطية:

$$\frac{dy}{dx}-2x=0 \text{ على الفترة } \Re=(-\infty,\infty).$$

الحل: باشتقاق الدالة المعطاة نحصل على $\frac{dy}{dx}=2x$. وبالتعويض في الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية نحصل على الطرف الأيمن. إذن الدالة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية على الفترة $\Re$.

باختيار قيم مختلفة للمَعْلَمَة c، نلاحظ أنّ الدوال: $y=x^2$ ، $y=x^2+1$ ، $y=x^2+2$ ، ...الخ، هي حلول للمعادلة التفاضلية على الفترة $\Re$، تحقق من ذلك.

وهكذا لو وضعنا أية قيمة للمَعْلَمَة c نحصل على حل للمعادلة التفاضلية المذكورة. أي أنّ الحلول تشكل عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة للمعادلة التفاضلية على الفترة $\Re$، كما مبين في الشكل (1.4).



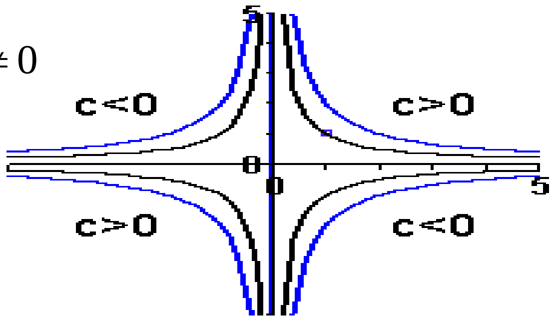
الشكل (1.4)

المثال (2): الدالة $y=\dfrac{c}{x}$ **تمثل عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة للمعادلة التفاضلية الخطية:**

$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=0$ **على الفترة** $I_1=\{x:x\in\Re,x\neq 0\}$.

الحل: باشتقاق الدالة المعطاة نحصل على $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{c}{x^2}$ **. وبالتعويض في الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية نحصل على الطرف الأيمن. إذن الدالة المعطاة هي عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة للمعادلة التفاضلية على الفترة** I_1 **، كما في الشكل (1.5).**

$y=\dfrac{c}{x},\quad x\neq 0$



الشكل (1.5)

يمكن تعميم المعادلة التفاضلية السابقة (1.9) وعائلة الحلول بمَعْلَمَة واحدة (1.10) لتشمل عائلة حلول بمَعْلَمَات عددها n **- للمعادلة تفاضلية من الرتبة** n**:**

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0 \qquad (1.11)$$

على فترة معطاة I **. فعند حل المعادلة السابقة (1.11) نحصل على عائلة حلول تحتوي على** n **من المَعْلَمَات** $c_1,c_2,\ldots,c_n$ **ذات الصيغة:** $f(x,y,c_1,c_2,\ldots,c_n)=0$ **على الفترة المطاة** I **. هذا يعني أن للمعادلة التفاضلية من الرتبة** n **ذات الصيغة (1.11) عدداً غير منتهٍ من الحلول تبعاً للقيم المختلفة التي تقابل المَعْلَمَات** $c_1,c_2,\ldots,c_n$**.**

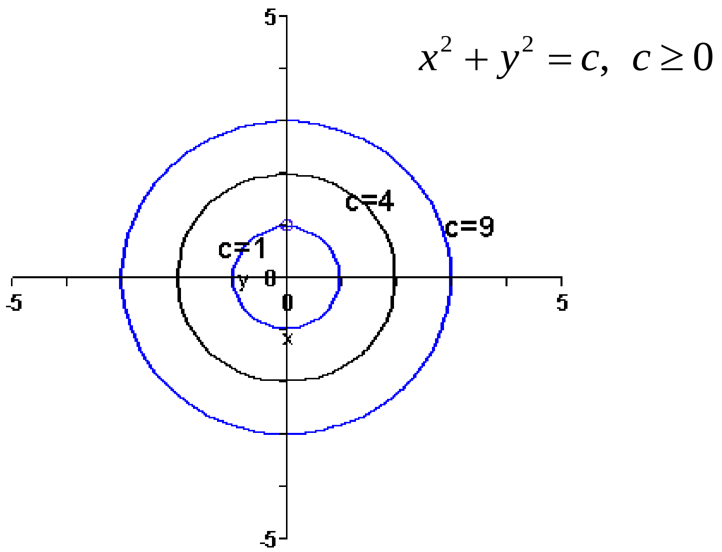
سنميز نوعين من الحلول:

أ- الحل الخاص: يدعى حل المعادلة التفاضلية الذي لا يحوي أي مَعْلَمَة بـ "الحل الخاص" (Particular solution)، كما سنبين ذلك في الأمثلة القادمة.

المثال(3):

من الواضح أن عائلة الحلول بمَعْلَمَة واحدة: $x^2+y^2=c$ تشكل حلولاً ضمنية للمعادلة التفاضلية غيرالخطية من الرتبة الأولى: $yy'+x=0$ على الفترة $I=(-\sqrt{c},\sqrt{c})$. **(تحقق من ذلك).**

نلاحظ أيضاً، أنّ الحل $x^2+y^2=1$ هو حل خاص للمعادلة التفاضلية الذي يقابل $c=1$. انظر الشكل (1.6).



الشكل (1.6)

المثال (4): بين بأن كل من الدالتين: $x=c_2\cos 3t$ و $x=c_1\sin 3t$ ، حيث إنّ c_1 و c_2 ثابتان اختياريان، هي عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة للمعادلة التفاضلية: $\frac{d^2x}{dt^2}+9x=0$ على الفترة $\Re=(-\infty,\infty)$

الحل: بإجراء المشتقة الأولى ثم الثانية بالنسبة للمتغير المستقل t على الدالة $x=c_1\cos 3t$

نحصل على: $\frac{dx}{dt}=-3c_1\sin 3t$ و $\frac{d^2x}{dt^2}=-9c_1\cos 3t$ ، وبالتعويض في الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=-9c_1\cos 3t+9(c_1\cos 3t)=0$$

وتساوي الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية.

إذن الدالة $x = c_1 \cos 3t$ هي عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة للمعادلة التفاضلية: $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$

على الفترة $\Re = (-\infty, \infty)$.

بالمثل يمكن اثبات أن الدالة $x = c_1 \sin 3t$ هي عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة للمعادلة التفاضلية:

$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ على الفترة $\Re = (-\infty, \infty)$.

ب- الحل العام: يدعى حل المعادلة التفاضلية الذي يضم الحلول كافة بـ "الحل العام" (General solution). وفي حالة المعادلة في المثال (4) وهي من الرتبة الثانية يكون الحل العام عبارة عن تركيب خطي للحلين $\sin 3t$ و $\cos 3t$، أي أن $x = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$ هو حل عام للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$. كما أنّ الدالة $x = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$ هي عائلة حلول بمَعْلَمَتين اثنتين للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ على الفترة $\Re = (-\infty, \infty)$ أيضاً.

ملاحظة: إنّ الفرق بين الحل العام وعائلة الحلول هو أنّ عائلة الحلول هي مجموعة جزئية من مجموعة الحل العام.

1.7 مسائل القيم الابتدائية (Initial value problems)

من أكثر المسائل أهمية في المعادلات التفاضلية هو إيجاد حل $y = f(x)$ لمعادلة تفاضلية يحقق شرطاً معيناً على فترة معلومة I. أي يعطى شرطاً على y أو على مشتقاتها عند نقطة معينة x_0 تنتمي لفترة التعريف I. تكتسب هذه المسألة أهميتها من تطبيقاتها العملية التي سنتناولها في الفصول القادمة.

تأمل المسألة الآتية: جد حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (1.12)$$

وفق الشروط:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad (1.13)$$

حيث إنّ $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ هي ثوابت حقيقية اختيارية تعطى في المسألة.

تدعى المسألة (1.12) و (1.13) بـ " مسألة القيم الابتدائية" من الرتبة n ويرمز لها بالرمز (IVP)، وتدعى قيم y ومشتقاتها حتى الرتبة $(n-1)$ عند النقطة x_0، أي $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$ بـ "الشروط الابتدائية".

في حالة الرتبة الأولى إنّ (IVP) تصبح:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.14}$$

وفق الشرط:

$$y(x_0)=y_0 \tag{1.15}$$

تدعى (1.14) و (1.15) بـ "مسألة القيمة الابتدائية" من الرتبة الأولى. يمكن تفسير (IVP) من الرتبة الأولة هندسياً بأن المطلوب إيجاد حل المعادلة التفاضلية الذي يمر بالنقطة (x_0,y_0) على الفترة I التي تحوي النقطة x_0.

وفي حالة الرتبة الثانية إنّ (IVP) تصبح:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,y,y') \tag{1.16}$$

وفق الشرطين:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1 \tag{1.17}$$

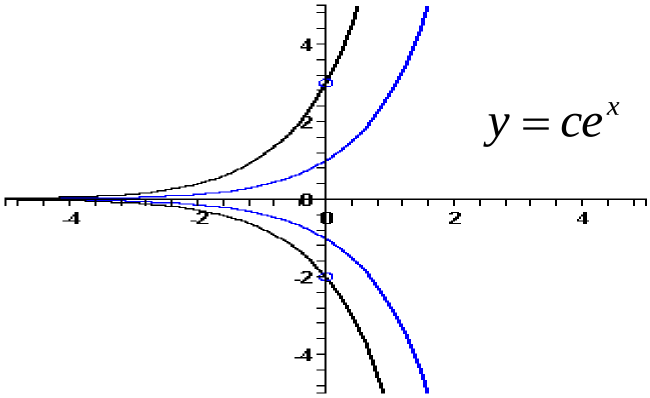
تدعى (1.16) و (1.17) بمسألة القيم الابتدائية من الرتبة الثانية، التي يمكن تفسيرها هندسياً بأن المطلوب إيجاد حل المعادلة التفاضلية الذي يمر بالنقطة (x_0,y_0) وميله عند النقطة x_0 يساوي y_1، على الفترة I التي تحوي النقطة x_0.

تؤدي هذه المسألة أهمية كبيرة في الفيزياء باعتبار أنّ الحل يمر من نقطة معلومة x_0 وسرعته y_1 عند النقطة x_0 معطاة أيضاً ، باعتبار أن المشتقة تمثل هندسياً بالسرعة.

سيتم التركيز في هذا المؤلف على مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الأولى والثانية لاكتسابها أهمية بالغة في التطبيقات، كما سنلاحظ ذلك في الفصول القادمة.

المثال (1): جد حل مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة الأولى: $y'=y,\quad y(0)=3$

الحل: لإيجاد حل المعادلة التفاضلية: $y' = y$ نحصل على عائلة المنحنيات $y = ce^x$ على الفترة $\Re = (-\infty, \infty)$ (تحقق من ذلك). وعند التعويض بالشرط الإبتدائي: $y(0) = 3$ نحصل على الحل الخاص: $y = 3e^x$. انظر الشكل (1.7).



الشكل (1.7)

عند استبدال الشرط الإبتدائي في (IVP) نحصل على مسألة جديدة وحل مختلف، فعلى سبيل المثال يمكن التأكد بسهولة أنّ حل (IVP): $y(1) = -2$, $y' = y$ هو $y = -2e^x$ على الفترة نفسها. هنا استبدلنا فقط الشرط الإبتدائي $y(0) = 3$ بالشرط $y(1) = -2$ وحصلنا على مسألة مختلفة وحل مختلف، كما هو موضح في الشكل (1.7).

المثال (2): ناقش حل مسألة القيم الابتدائية من الرتبة الثانية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0, \quad x(\frac{2\pi}{3}) = -2, \; x'(\frac{2\pi}{3}) = 1$$

الحل: سبق أن بيّنا في المثال (4) من البند (1.6) أنّ الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ هو: $x(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$ على الفترة $\Re = (-\infty, \infty)$ (تحقق من ذلك).

وعند التعويض بالشرط الإبتدائي: $x(\frac{2\pi}{3}) = -2$ نحصل على :

$$-2 = c_1 \cos 3(\frac{2\pi}{3}) + c_2 \sin 3(\frac{2\pi}{3}) = c_1 \cos 2\pi + c_2 \sin 2\pi = c_1$$

وبإجراء المشتقة على عائلة الحلول بالنسبة الى المتغير t نحصل على:

$$\frac{dx}{dt} = -3\,c_1\,\sin 3t\; + 3\,c_2\,\cos 3t$$

وعند التعويض بالشرط الإبتدائي: $x'(\frac{2\pi}{3}) = 1$ نحصل على:

$$1 = -3c_1\,\sin\,3(\frac{2\pi}{3}) + 3c_2\sin 3(\frac{2\pi}{3}) = -3c_1\,\sin\,2\pi + 3c_2\cos 2\pi = 3c_2$$

إذن $c_1 = -2, \quad c_2 = \frac{1}{3}$. وعليه فإنّ الحل الخاص هو:

$$x(t) = -2_1\,\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t\,.$$

المثال (3):

الدالتان: $y_1(x) = 1 - x$ و $y_2(x) = -\frac{x^2}{4}$ **حلان للمعادلة التفاضلية غير الخطية:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + 4y}\,) \qquad (1.18)$$

مع الشرط الإبتدائي

$$y(2) = -1 \qquad (1.19)$$

تحقق من ذلك.

ويمكن التحقق بسهولة من أنّ الدالة: $y(x) = cx + c^2$ ، **حيث إنّ** c **ثابت اختياري، هي عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة للمعادلة التفاضلية (1.18).**

إذا كانت $c = -1$ **فإنّ الشرط الإبتدائي (1.19) يتحقق ايضاً ونحصل على الحل** $y_1(x) = 1 - x$ **. لكن لا توجد أية قيمة من قيم الثابت** c **نحصل فيها على الحل** $y_2(x) = -\frac{x^2}{4}$ **.**

يدعى هذا النوع من الحلول بـ "الحل المنفرد" (Singular solution) للمعادلة (1.18) أو " الحل الشاذ " . أي أنّ الحل المنفرد هو ذلك الحل الذي يحقق المعادلة التفاضلية، ولكنه ليس من أفراد عائلة الحل. من الواضح أنّ الدالة: $y(x) = cx + c^2$ **ليست حلاً عاماً للمعادلة (1.18) من وجهة نظر تعريفنا السابق للحل العام.**

المثال (4):

لنعد الى المثال (2) من البند (1.3). لقد بينا أن $y=\frac{1}{16}x^4$ و $y=0$ هما حلان للمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx}=x\,y^{\frac{1}{2}}$ على الفترة $(-\infty,\infty)$. من جانب آخر إنّ $y=(\frac{1}{4}x^2+c)^2$ هي عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة للمعادلة التفاضلية نفسها. عندما $c=0$ ، نحصل على الحل: $y=\frac{1}{16}x^4$ الذي هو أحد أفراد عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة للمعادلة التفاضلية. في حين أنّ الحل $y=0$ ليس من افراد العائلة، بل هو حل منفرد للمعادلة التفاضلية. في الحقيقة لا توجد قيمة للثابت c تعطي الحل $y=0$.

في البند القادم سنتناول مسألة في غاية الأهمية تتعلق بوجود الحل، وهل الحل (في حالة كونه موجوداً) هو وحيد أم لا؟

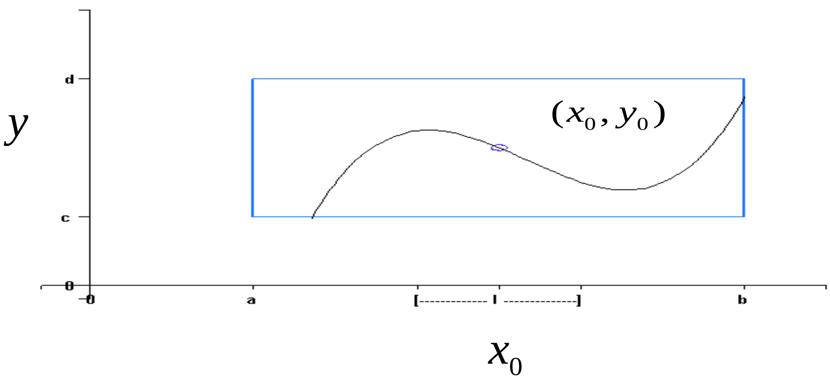
1.8 وجود حل المعادلة التفاضلية و وحدانيته

(Existence and uniqueness of solution of DE)

قبل البدء بمحاولة حل معادلة تفاضلية من المهم أن نعرف إن كان للمعادلة التفاضلية حل، وهل الحل وحيد أم لا؟ وفيما يأتي نتطرق إلى بعض الاصطلاحات والتعريفات والمبرهنات المتعلقة بوجود حل للمعادلة التفاضلية الاعتيادية و وحدانيته.

ليكن $\Re$ ترمز الى مجموعة الأعداد الحقيقية، و $\Re^2=\Re\times\Re$ هو المستوى - xy.

تأمل المنطقة S المستطيلة الشكل: $S=\{(x,y): a\le x\le b\ ,\ \ c\le y\le d\}$ حيث إنّ S مجموعة جزئية من $\Re^2$ أو تساويها وإنّ a,b,c,d أعداد حقيقية، كما موضح في الشكل (1.8):



الشكل (1.8)

المبرهنة (1.1): إذا كانت $f(x,y)$ ومشتقتها الجزئية $\frac{\partial f}{\partial y}$ دالتين متصلتين بالمتغيرين x و y على منطقة مستطيلة الشكل S تحوي (x_0, y_0):

$$S=\{(x,y): a\le x\le b \ , b\le y\le c\}$$

فعندئذٍ يوجد حل وحيد $y(x)$ لمسألة القيمة الابتدائية: $y(x_0)=y_0$, $y'=f(x,y)$

على الفترة: $|x-x_0|\le h$.

لا داعي لبرهان المبرهنة السابقة، ويمكن للطالب الاطلاع على بعض الكتب في نظرية المعادلات التفاضلية في المصادر، وسنكتفي باعطاء تطبيقات:

المثال (1):

تامل مسألة القيمة الابتدائية: $y(0)=0$, $y'=4y^{\frac{3}{4}}$ **، نلاحظ أنّ لمسألة القيمة الابتدائية حلين هما:** $y=0$ **و** $y(x)=x^4$ **(تحقق من ذلك)، أي ليس لها حل وحيد، وهذا لا يتعارض مع المبرهنة (1.1) لأن الدالة:** $f(x,y)=4y^{\frac{3}{4}}$ **ومشتقتها الجزئية هي** $\frac{\partial f}{dy}=3y^{-\frac{1}{4}}$ **غير متصلة على أية منطقة مستطيلة تحوي** $(0,0)$**. أي أنّ أحد شروط المبرهنة السابقة لم يتحقق.**

المثال (2):

تامل مسألة القيمة الابتدائية: $y(0)=0$, $y'=x+y$ **، نلاحظ أنّ شروط المبرهنة (1.1) قد تحققت لأن كلاً من** $f(x,y)=x+y$ **ومشتقتها الجزئية** $\frac{\partial f}{\partial y}=1$ **متصلة على أية منطقة تحوي** $(0,0)$**. إذن حسب المبرهنة (1.1) يوجد لمسألة القيمة الابتدائية حل وحيد ؛ هو :** $y=1-x-e^x$ **.**

بالطبع من حق الطالب أن يسأل: كيف تم الحصول على هذا الحل؟ فالجواب هو : هذا هو المحور الرئيس في هذا الكتاب، كما سنشاهد ذلك في الفصل الثاني.

ملاحظة: هنالك مبرهنات أخرى حول وجود حل معادلة تفاضلية و وحدانيته تحتاج الى شروط أخف من الشروط المذكورة في المبرهنة (1.1) أعلاه.

سنتناول الآن تعريفاً هاماً منسوباً الى العالم الألماني رادلف ليبشتز (Rudolf Lipschitz) الذي عاش في بون خلال الفترة (1832-1903م) وله اسهامات كثيرة في المعادلات التفاضلية والجبر ونظرية العدد، وعلم الحركة (الميكانيك).

التعريف (1.7): يقال للدالة $f(x,y)$ بأنها تحقق شرط ليبشتز(Lipschitz) بالنسبة للمتغير y على المنطقة D الجزئية من $\Re^2$ ، أي أنّ $D \subseteq \Re^2 = \Re \times \Re$ ، إذا وجد عدد ثابت L يحقق المتبياينة:

$$|f(x,z) - f(x,w)| \le L|z-w| \text{، } \forall (x,z),\ (x,w) \in D$$

و يسمى L بثابت ليبشتز.

المثال (3):

لتكن: $f(x,y) = xy, \quad D = \{(x,y):\ 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 5 \quad \}$

فإنّ المتراجحة:

$$|f(x,z) - f(x,w)| = |xz - xw| = |x|\,|z-w| \le 2\,|z-w|$$

تتحقق لكل $(x,z) \in D$ و $(x,w) \in D$.

لذلك إنّ الدالة $f(x,y) = xy$ تحقق شرط ليبشتز بالنسبة للمتغير y وثابت ليبشتز $L = 2$.

المثال (4):

الدالة $f(t,x) = \sqrt{x}$ المعرفة على المنطقة المستطيلة الشكل:

$$D = \{(t,x):|\ t\ |\ \le 2,\ |\ x\ | \le 2\}$$

لا تحقق شرط ليبشتز لأنّ : $x \ne 0$ ، $\dfrac{f(t,x) - f(t,0)}{x-0} = x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ غير مقيد، لأن قيمة المقدار الجبري تصبح كبيرة جداً عندما تقترب x من الصفر.

وفيما يأتي بعض المبرهنات التي توضح علاقة شرط ليبشتز بالدوال المتصلة وقابلية الاشتقاق.

المبرهنة (1.2): إذا كانت الدالة $f(x,y)$ تحقق شرط ليبشتز بالنسبة للمتغير y على المنطقة D فإنّ f متصلة (مستمرة) بالنسبة للمتغير y على D.

البرهان: ليكن L ثابت ليبشتز بالنسبة للدالة f . لكل $\varepsilon > 0$ يوجد δ ، (ليكن $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$)، بحيث لكل z و w تحقق $|z-w| < \delta$ فإنّ

$$|f(x,z) - f(x,w)| \le L\,|z-w| \le L\delta = \varepsilon .$$

ولذلك تكون الدالة f متصلة بالنسبة للمتغير y .

المبرهنة (1.3): إذا وجد عدد L بحيث تحقق الدالة f :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le L \quad , \quad \forall (x,y) \in D = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ -\infty < y < \infty\}$$

فإنّ f تحقق شرط ليبشتز بالنسبة للمتغير y على D و L هو ثابت ليبشتز.

البرهان: نفرض أنّ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ موجودة على D وتحقق: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le L \ ,\ \forall (x,y) \in D$

وبما أنّ $f(x,z) - f(x,w) = (z-w)\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, w+\tau(z-w))\,d\tau$ فإنّ

$|f(x,z) - f(x,w)| \le |z-w| \displaystyle\int_0^1 L\,d\tau = L|z-w|$. وبذلك تحقق الدالة f شرط ليبشتز.

المثال (5):

ليكن: $D = \{(x,y): 0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 5\}$ و $f(x,y) = 1 + xy^2$.

بما أنّ: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = |2\,x\,y| \le 50 \qquad \forall (x,y) \in D$ فإنّ الدالة f بحسب المبرهنة السابقة تحقق شرط ليبشتز على D مع ثابت ليبشتز $L = 50$.

المبرهنة القادمة تتعلق بوجود ووحدانية حل مسائل القيم الابتدائية، سنكتفي بذكر منطوقها من غير البرهان حيث إنّ ذلك يعد من الموضوعات المتقدمة ونكتفي بذكر مصادر.

المبرهنة (1.4): (وجود الحل و وحدانيته)

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ متصلة (مستمرة) بالمتغيرين x, y على منطقة مغلقة ومقيدة (متراصة) $R(a,b) = \{(x,y): |x| \le a, |y| \le b\}$ تحوي النقطة (x_0, y_0) وتحقق شرط ليبشتز عليها فإن

مسألة القيمة الابتدائية: $y' = f(x,y),\ \ y(x_0) = y_0$ يكون لها حل وحيد $y(x)$ معرف على الفترة: $|x - x_0| \le h \le a$.

لمن يرغب بالاطلاع على برهان المبرهنة السابقة يمكنه الرجوع الى أحد الكتب المتخصصة في نظرية المعادلات التفاضلية المذكورة في قائمة المصادر، والتي تدعى طريقة البرهان بـ " طريقة التقريبات المتتابعة" (Method of successive approximations).

كما نود الإشارة الى أنّ بعض المبرهنات المتعلقة بوجود ووحدانية الحل يمكن برهانها بشروط أخف من الشروط المعطاة في المبرهنة (1.4). كما إنّ هذا الموضوع قد تطور كثيراً في الحقبة الزمنية المنصرمة، وتم إثبات: وجود و وحدانية حل معادلات تفاضلية برتب كسرية، كذلك في فضاءات متعددة مثل: الفضاء الأقليدي - n، فضاءات هلبرت (Hilbert)، فضاءات الدوال المتصلة المعرفة على فترة مغلقة ومقيدة $C(a,b)$ ، وفضاءات أخرى. انظر قائمة الكتب والبحوث في مصادر الكتاب.

المثال (6):

لإثبات وجود حل وحيد لمسألة القيمة الابتدائية $y(1) = 0 \quad y' = \dfrac{x}{1+y^2},$ معرّف على الفترة $[1,5]$ ، علينا إثبات تحقيق الدالة $1 \le x \le 5 \quad f(x,y) = \dfrac{x}{1+y^2},$ لشرط ليبشتز بالنسبة للمتغير y . بما إنّ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-2xy}{(1+y^2)^2}$ ولكل y ، فإنّ $1 + y^2 \ge 2y$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le \left|\frac{x}{1+y^2}\right| \le |x| \le 5$$

. وعلى ضوء المبرهنة (1.3) إنّ الدالة f تحقق شرط ليبشتز على المنطقة: $D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ -\infty < y < \infty\}$. وبما ان الدالة f متصلة على D فإنّ المبرهنة (1.4) تضمن وجود حل وحيد لمسألة القيمة الابتدائية على الفترة $[1\ ,\ 5]$.

لبيان ضرورة الشروط المعطاة في المبرهنة (1.4) لوجود حل وحيد لمسألة القيم الابتدائية، نتناول المثالين الآتيين:

المثال (7):

تأمل مسألة القيمة الابتدائية: $y(0) = 0 \qquad y' = 3y^{2/3},$

نلاحظ أنّ لمسألة القيمة الابتدائية في هذا المثال أكثر من حل، فبسهولة يمكن للطالب أن يتحقق من أنّ الدالتين: $y_1 = x^3, \quad y_2 = 0$ تحققان المعادلة التفاضلية والشرط الإبتدائي. في الحقيقة أنّ الدالة $f(x,y) = 3y^{2/3}$ لا تحقق شرط ليبشتز على أية منطقة تحتوي النقطة $(0,0)$ وذلك لأن المشتقة الجزئية بالنسبة للمتغير y وهي:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

غير معرفة عند $y = 0$. إذن شروط المبرهنة (1.4) لم تتحقق.

المثال (8):

تأمل المعادلة التفاضلية: $y' = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x < 0 \\ 1 & if \quad x \geq 0 \end{cases}$

نلاحظ أنّه لا يوجد لها حل. في الحقيقة الدالة: $y = \begin{bmatrix} c, & x < 0 \\ x + c, & x \geq 0 \end{bmatrix}$ متصلة لجميع قيم x وتحقق المعادلة التفاضلية لجميع قيم x عدا القيمة $x = 0$ لأن المشتقة عندها تكون غير موجودة. لذلك لا يمكن اعتبار هذه الدالة حلا للمعادلة التفاضلية. في الواقع أن سبب عدم وجود حل للمعادلة التفاضلية يعود إلى كون الدالة f غير متصلة عند $x = 0$، أي أنّ الدالة f لا تحقق شرط الاتصال عند $x = 0$. إذن شروط المبرهنة (1.4) لم تتحقق.

ملاحظة: يمكن القول بشكل عام إنّ شرط الاتصال للدالة $f(x,y)$ على المنطقة المستطيلة S يضمن وجود حل للمعادلة $y' = f(x,y)$ ، أما وحدانية الحل فيقترن باضافة شرط ليبتشز أو اتصال المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{dy}$ على S.

بعد أن تناولنا وجود ووحدانية الحل لمسائل القيمة الابتدائية، سنتطرق إلى أمر مهم - لاسيما أننا سنتناول الحلول التقريبية في الفصل العاشر- هو مدى تأثر الحل بتغيير قيمة الشرط الابتدائي.

المبرهنة (1.5): ليكن $f(x,y)$ دالة متصلة وتحقق شرط ليبشتز بالنسبة للمتغير y على المنطقة $D = \{(x,y) : a-h \leq x \leq a+h, \ -\infty < y < \infty\}$ وثابت ليبشتز L. نفرض $y = y(x)$ حل مسألة القيمة الابتدائية: $y' = f(x,y), \ y(a) = \eta$ وأن $Y = Y(x)$ حل المسألة: $y' = f(x,y), \quad y(a) = \eta + \varepsilon$ حيث ε عدد صغير فإنّ

$$Y(x)-y(x)\le \varepsilon e^{Lh}, \qquad \forall x\in[a-h,a+h]$$

إذن المبرهنة السابقة تبين أنّ تغييراً صغيراً لقيمة الشرط الإبتدائي لمسألة القيم الابتدائية يسبب تغييراً صغيراً بالحل خلال فترة محددة إذا ما تحققت نفس شروط المبرهنة (1.5). ويمكن للطالب أن يتابع تفاصيل أكثر عن هذا الموضوع في أحد المصادر.

المثال (9):

لتكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية: $y'=2xy,\ \ y(0)=1,\ \ |x|\le h$ **. الدالة** $f(x,y)=2xy$ **تحقق:** $|f(x,z)-f(x,w)|\le 2h|z-w|$ **على الفترة** $[-h,h]$**. أي أنّ** f **تحقق شرط ليبشتز بثابت** $L=2h$**. إنّ حل المسألة الوحيد هو:** $y(x)=e^{x}$ **، أما بالنسبة للشرط الابتدائي** $y(0)=1+\varepsilon$ **فسيكون الحل:** $Y(x)=(1+\varepsilon)e^{x^2}$ **. وعليه يكون:**

$$|Y(x)-y(x)|=\left|\varepsilon e^{x^2}\right|\le \varepsilon e^{Lh}, \quad \forall x\in[-h,h]$$ **، حيث** $L=h$**.**

1.9 منحنيات الحل و الحقل الاتجاهي (Solution curves and direction fields)

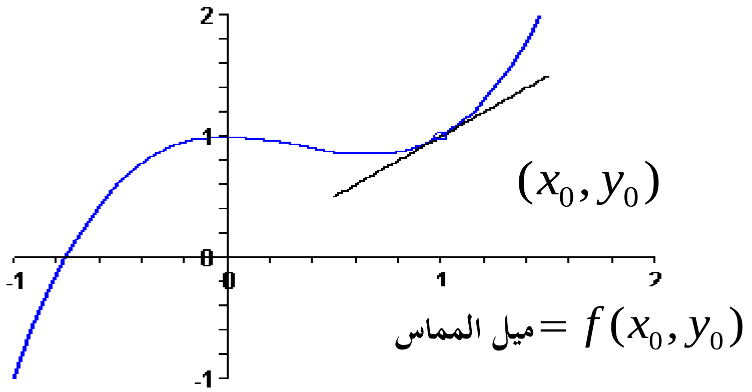
لقد بينا في البنود السابقة أنّ بعض المعادلات التفاضلية قد لا يوجد لها حل وأخرى لها حلول صريحة أو ضمنية. و سنتطرق في الفصول القادمة الى طرائق تحليلية مختلفة لإيجاد الحلول لأنواع من المعادلات التفاضلية. وسيتبين في بعض الأحيان بالرغم من وجود حل لمعادلة تفاضلية إلا أننا لا نستطيع إيجاده بأحدى الطرائق التحليلية. أي أن وجود الحل لا يعني أنّ هناك طريقة تحليلية لإيجاده. من ناحية أخرى يمكننا استخدام البرمجيات لايجاد حلول للمعادلات التفاضلية أو حلول تقريبية لها، ولكن في بعض الأحيان قد لا تكون هذه البرمجيات مجدية ما لم تتم دراسة مسبقة لسلوك منحنيات الحل.

في هذا البند سيتعلم الطالب دراسة سلوك حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى التي يمكن كتابتها بالصيغة:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (1.20)$$

أي معرفة كونها متزايدة (Increasing) أو متناقصة (Decreasing) عند نقاط معينة و غايتها عندما تؤول قيم x **الى** ∞ **و هل هناك محاذٍ (Asymptote) لها؟ سيتم كل هذا عن طريق رسم منحنيات حلولها من دون معرفة الحلول ذاتها.**

هناك علاقة وطيدة بين إحداثيات نقطة معينة وميل المماس لمنحني حل المعادلة التفاضلية (1.20) عند هذه النقطة. وهي عند كل نقطة (x, y) تكون فيها f معرفة فإنّ المعادلة التفاضلية (1.20) تعرف ميل منحني الحل، أي اتجاه مسارالحل عند هذه النقطة. لذا يمكن انشاء مماس لمنحني الحل عند نقطة معلومة دون معرفة دالة الحل ذاتها، لاحظ الشكل (1.9):



الشكل (1.9)

و على هذا الأساس إذا رسمنا قطعاً لمماسات الحل عند عدد من النقاط المختارة نحصل على حقلا اتجاهياً (Direction field). بتعبير آخر، نقول إنّ المعادلة التفاضلية (1.20) تعرّف حقلاً اتجاهياً وإنّ اتجاه المماسات لمنحنيات الحل عند النقاط المختلفة للمنحنيات يتطابق مع الحقل الاتجاهي. أي تعرّف الدالة f حقلاً اتجاهياً أو حقلاً مماساً (Tangent field). بذلك يمكن تتبع منحنيات حل المعادلة التفاضلية و دراسة سلوكها من خلال الحقل الاتجاهي للمعادلة .

لأجل انشاء حقل اتجاهي للمعادلة (1.20) نتبع ما يأتي:

1. نعرف عدداً محدداً من النقاط، ولتكن mn من النقاط، على المنطقة المستطيلية R المراد إيجاد منحنيات الحل فيها: أي النقاط

$$P_{ij} = (x_i, y_j) \ ، \ i = 1,2,3,\dots,m \ , \ j = 1,2,3,\dots,n$$

حيث $$S = \{(x, y) : a \le x \le b \ , \ c \le y \le d\}$$

3. نرسم عند كل نقطة P_{ij} قطعة مستقيم قصيرة ميلها يساوي $f(x_i, y_j)$.

لتسهيل مهمة رسم القطع المستقيمة باليد علينا رسمها كمجموعات متساوية الميل، أي لكل قيمة ثابتة k نرسم مجموعة القطع المستقيمة المارة بالنقاط $P_{ij} = (x_i, y_j)$ بحيث $k = f(x_i, y_j)$.

وبتغير الثابت k نحصل على قطع مستقيمات أخرى متساوية الميل كذلك. وهذا يعني أنه من الممكن رسم حقول اتجاهية لبعض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى باليد، كما في الامثلة الآتية: بشكل عام يمكن الاستعانة ببعض البرمجيات، مثل ميبل (MAPLE) لرسم الحقول الاتجاهية للمعادلات التفاضلية.

المثال (1): ارسم حقلاً اتجاهياً للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = -y$. ثُم تتبع مساراً تقريبيا للحل المار بكل من النقاط الأتية: $(0,-1)$, $(0,0)$, $(0,1)$

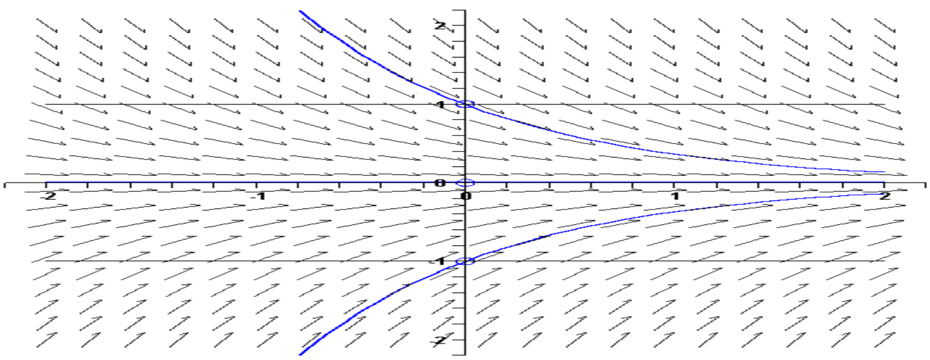
الحل: بما أن $f(x,y) = -y$ فأن $f(x,y) = k$ يعني $-y = k$ ، ومنها نجد أنّ ميل المتجهات هو صفر على امتداد المحور- x ويساوي هذا الميل (-1) على امتداد المستقيم $y = 1$ ، أما على امتداد المستقيم $y = -1$ فيساوي $(+1)$ وبالمثل على المستقيمات الافقية كما في الشكل (1.10).

وبما أن $f(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ مستمران على المستوي الموسع :

$$U = \{(x,y) : -\infty \le x \le \infty \;,\; -\infty \le y \le \infty\}$$

فإن المبرهنة (1.1) تضمن وجود حل وحيد يمر بكل نقطة معلومة (x_0, y_0) في المستوي الموسع U ، كما في الشكل (1.10) الذي يحوي منحنيات حل تقريبية مارة بالنقاط المذكورة في المسألة.

نلاحظ في الشكل (1.10) أن الحل المار بالنقطة $(0,1)$ متناقص و يؤول للصفرعندما $x \to \infty$، وهذا ينطبق على كافة الحلول المارة بنقاط فوق المحور x. كما أن الحل المار بالنقطة $(0,0)$ هو الحل الصفري، وكذلك أي حل مار بنقطة واقعة على المحور x. أما الحل المار بالنقطة $(0,-1)$ و الحلول المارة بأية نقطة تحت المحور x كافة فهي متزايدة و تؤول للصفر أيضا.

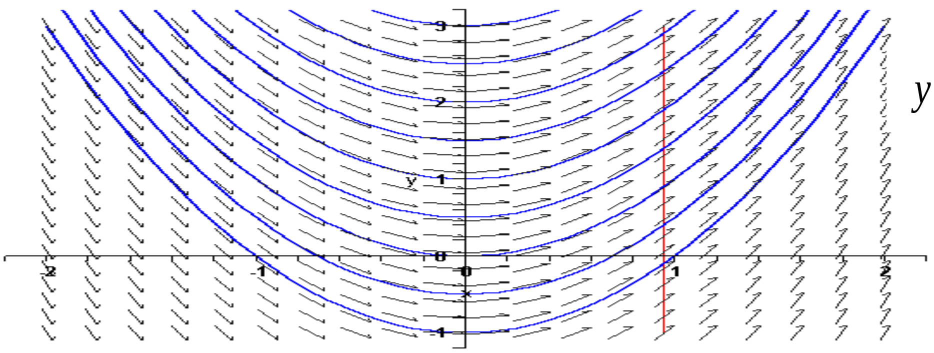


الشكل (1.10): حقل إتجاهي للمعادلة $y' = -y$

نستنتج مما سبق أن سلوك منحنيات الحل تعتمد على القيمة الابتدائية فيما إذا كانت موجبة أم سالبة أم صفراً، كما أن جميع الحلول تؤول للصفر عندما $x \to \infty$. ولذلك يعتبر الحل الصفري محاذيا أفقيا للحلول الأخرى ويسمى في هذه الحالة بالحل المتزن (Equilibrium solution). يمكن للطالب أن يتحقق بأن $y = c\ e^{-x}$ حيث c ثابت أختياري، تشكل عائلة الحلول للمعادلة التفاضلية $y' = -y$.

المثال (2): ارسم حقلاً اتجاهياً للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$. ثم ارسم منحنيات تقريبية لحلها.

الحل: نعرف أولا منطقة الحل، ولتكن $S_1 = \{(x,y) : -2 \le x \le 2\ ,\ -1 \le y \le 4\}$ ، و نعين نقاط الحقل الاتجاهي $i = 1,2,3,\ldots,m\ ,\ j = 1,2,3,\ldots,n$ ، $P_{ij} = (x_i, y_j)$. نضع $f(x,y) = x = k$ ثم لقيمة معينة لـ k نرسم قطعاً مستقيمة ذات ميل يساوي k عند جميع النقاط الواقعة على امتداد الخط المستقيم $x = k$ ، أي النقاط $\{(k, y_j) : j = 1,2,3,\ldots,n\}$. وبتكرار العملية لقيم أخرى لـ k سنحصل على حقل اتجاهي للمعادلة المعلومة كما في الشكل (1.11):



حقل إتجاهي للمعادلة $y' = 2x$

الشكل (1.11):

بتتبع بعض المسارات للحقل الاتجاهي في الشكل (1.11) نحصل على منحنيات للحل وهي عبارة عن قطوع مكافئة متماثلة مع المحور- y . يمكن للطالب أن يتحقق بأن $y = x^2 + c$ حيث c ثابت اختياري، تشكل عائلة الحلول للمعادلة التفاضلية $y' = 2x$.

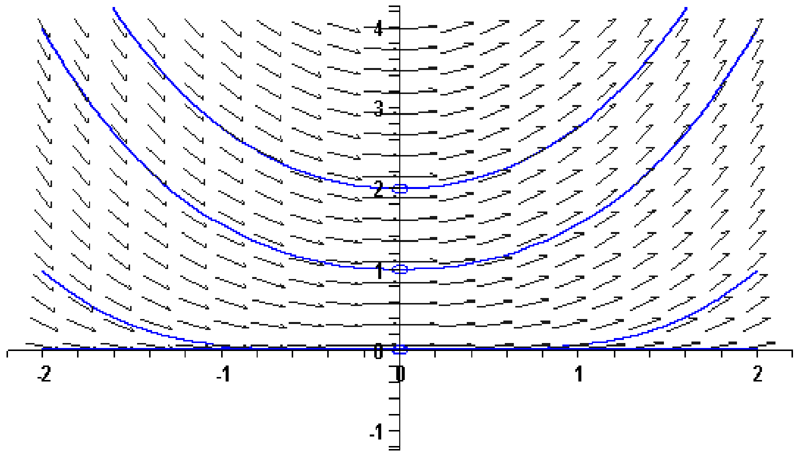
المثال (3): أستخدم إحدى برمجيات الحاسوب لرسم حقل اتجاهي للمعادلة التفاضلية $y' = x\sqrt{y}$ على المنطقة المستطيلة $S_2 = \{(x,y) : -2 \le x \le 2\ ,\ -2 \le y \le 4\}$. ثم ادرس سلوك منحنيات

الحل وعلاقتها بمبرهنة وجود ووحدانية الحل، المبرهنة (1.1)، و قارنها بالحل التحليلي $y=(\frac{1}{4}x^2+c)^2$ و الحل المنفرد $y=0$.

الحل: لرسم الحقل الاتجاهي المطلوب باستخدام ميبل (MAPLE) ننفذ التعليمات الاتية:

```
> with(DEtools):
> de:=diff(y(x),x)=x*sqrt(y(x));
> dfieldplot(de,y(x),x=-2..2, y=-1..4 )
```

وبإضافة أوامر الرسم نحصل على الشكل (1.12) الاتي:



الشكل (1.12) حقل إتجاهي للمعادلة $y'=-x\sqrt{y}$

من خلال معاينة الشكل (1.12) يتضح أولاً عدم وجود حلول تمر بنقاط واقعة أسفل المحور- x، وهذا يتماشى مع المبرهنة (1.1)، حيث إنّ $f(x,y)=x\sqrt{y}$ دالة غير متصلة عندما $y<0$ ، بينما تكون متصلة على $S_3=\{(x,y): y\geq 0\}$ وعليه فإنه يوجد لأية نقطة (x_0,y_0) واقعةً على المحور- x أو فوقه (أي $y_0\geq 0$, $-\infty<x_0<\infty$) حل يمر بها. من ناحية أخرى نرى أنّ هناك حلين يمران بالنقطة $(0,0)$ ، وهذا أيضا يتماشى مع المبرهنة (1.1) حيث إن الدالة $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-x}{2\sqrt{y}}$ غير مستمرة عندما $y\leq 0$ ، و عليه لا ضمان لوحدانية الحل المار بنقطة واقعة على المحور- x . من خلال تتبع مسارات الحقل الاتجاهي نلاحظ أنّ لكل نقطة (x_0,y_0) حيث $y_0>0$ و $-\infty<x_0<\infty$ هناك حل وحيد يمر بها و هذا ما تضمنه المبرهنة (1.1). ويمكن

للطالب أن يتحقق بأن $y=(\frac{1}{4}x^2+c)^2$ حيث c ثابت اختياري، تشكل عائلة حلول للمعادلة التفاضلية $y'=x\sqrt{y}$ ولكنها لا تشمل الحل المنفرد $y=0$.

1.10 المخرجات التعليمية للفصل (Learning outcomes)

بعد الانتهاء من دراسة الفصل يكون الطالب قد أتقن المخرجات التعليمية الآتية:

1. التمييز بين المعادلات التفاضلية الاعتيادية والمعادلات الكسرية أوالجزئية.
2. تصنيف المعادلات التفاضلية من حيث: الرتبة والدرجة والخطية، والتجانس.
3. التعرف على المعادلات التفاضلية الخطية بصيغتها العامة.
4. التعرف على أنواع حلول المعادلات التفاضلية.
5. التحقق من أن دالة معينة هي حل لمعادلة تفاضلية معلومة.
6. التعرف على عائلة الحلول بمَعْلَمات - n.
7. تمييز مسائل القيم الابتدائية من غيرها.
8. التعرف على سلوك حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.
9. تحديد شروط وجود حل المعادلة التفاضلية و وحدانيته.
10. المفاهيم الأساسية التي تمكن الطالب من الانتقال الى الفصل الثاني.
11. المقدرة على استخدام القرص الممغنط المرافق للكتاب لمراجعة محتويات الكتاب.

تمارين الفصل الأول

حدد أي المعادلات التفاضلية في المسائل من 1- 6 اعتيادية أم جزئية، أم كسرية:

.1 $\dfrac{d^{\frac{1}{3}}y}{dx^{\frac{1}{3}}} + x^{k-1}y = x$

.2 $(\dfrac{dy}{dx})^{\frac{1}{3}} - xy = 1$

.3 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3\dfrac{\partial u}{\partial t}$

.4 $(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}) = \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

.5 $y^{(\frac{1}{2})} = xy^{\frac{1}{2}}$

.6 $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$

حدد أي المعادلات التفاضلية من 7 - 11 خطية أم لاخطية وعين رتبة كل معادلة ودرجتها:

.7 $xy'' - 4y' + 3y = \sin x$

.8 $xy''' - 3(y'')^5 + y = 0$

.9 $yy' + 2y^3 = x^3$

.10 $x^2y^{(4)} - x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$

.11 $(1-y^2)dx + xdy = 0$

صنف المعادلات التفاضلية في المسائل من 12- 16 من حيث: الرتبة والدرجة، والخطية:

.12 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + (x+1)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

.13 $(\dfrac{d^4y}{dx^4})^3 - 2\dfrac{dy}{dx} + y = e^x \tan^{-1} x$

.14 $(\dfrac{d^3y}{dx^3}) + 2x\dfrac{dy}{dx} - y^2 = 2x + 1$

.15 $\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = 4x$

.16 $y^{(n)} = f(x, y)$

أثبت أن الدوال المثبتة أمام المعادلات التفاضلية في المسائل من 17- 24 هي حل لها:

.17 $y' + 4y = 32 \quad , \quad y = 8$

.18 $y' - 2y = e^{3x} \quad , \quad y = e^{3x} + 10e^{2x}$

.19 $\dfrac{dy}{dx} + 20y = 24 \quad , \quad y = \dfrac{6}{5} - \dfrac{6}{5}e^{-20x}$

.20 $y' - \dfrac{1}{x}y = 1, \quad \mathrm{y = x\ lnx}, \quad \mathrm{x > 0}$

.21 $\ln\frac{2-x}{1-x}=1 \quad , \quad \frac{dx}{dt}=(2-x)(1-x)$

.22 $y=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+c_1e^{-x^2} \quad , \quad y'+2xy=1$

.23 $y=e^{3x}\cos 2x \quad , \quad y''-6y'+13y=0$

.24 $y=\cosh x+\sinh x \quad , \quad y''=y$

.25 إذا كانت $y=\frac{1}{1+c_1e^{-x}}$ عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة للمعادلة $y'=y-y^2$ ، جد حل **(IVP)** المتكونة من المعادلة نفسها والشرط الابتدائي:

(أ) $y(0)=\frac{1}{4}$ ، **(ب)** $y(-1)=2$.

إذا كانت $x=c_1\cos t+c_2\sin t$ عائلة حلول بمعلمتين اثنتين للمعادلة $x''+x=0$ ، فجد حل **(IVP)** المتكونة من المعادلة نفسها والشرطين الابتدائيين في المسائل من 26- 29 :

.26 $x(\frac{\pi}{2})=0$ ، $x'(\frac{\pi}{2})=1$.   **.27** $x(0)=1$ ، $x'(0)=-7$.

.28 $x(\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$ ، $x'(\frac{\pi}{4})=\sqrt{21}$ **.29** $x(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ ، $x'(\frac{\pi}{6})=0$.

أثبت أنّ الدوال الثنائية التعريف المثبتة أزاء المعادلة التفاضلية في المسائل من 30- 31 هي حل لها :

.30 $y=\begin{cases} -x^2 & ,x<0 \\ x^2 & ,x\geq 0 \end{cases}$ و $xy'-2y=0$

.31 $y=\begin{cases} 0 & ,\ x<0 \\ x^3 & ,\ x\geq 0 \end{cases}$ و $(y') = 9xy$

.32 أثبت أن $y=cx+c^2$ عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة للمعادلة $y=xy'+(y')^2$. حدد قيمة k بحيث إنّ $y=kx^2$ هو حل منفرد للمعادلة التفاضلية.

33. اثبت أن $y=(1+ce^{2x})/(1-ce^{2x})$ عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة للمعادلة $y'=y^2-1$.

34. أثبت أن $y=\sqrt{4-x^2}$ و $y=-\sqrt{4-x^2}$ هما حلان للمعادلة التفاضلية:
$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$ في الفترة $(-2,2)$، وضح لماذا؟ في حين أن:
$$y=\begin{cases} -\sqrt{4-x^2} & , \quad 0\le x<2 \\ \sqrt{4-x^2} & , \quad -2<x<0 \end{cases}$$
ليست حلاً للمعادلة التفاضلية في الفترة المعطاة.

في المسألتين 35- 36 جد قيمة m بحيث يكون $y=x^m$ حلاً للمعادلة التفاضلية :

35. $x^2y''-y=0$ ، 36. $x^2y''+6xy'+4y=0$

37. بين أن الدالتين $y_1=x^2$ و $y_2=x^3$ هما حلاّن للمعادلة: $x^2y''-4xy'+6y=0$.
هل c_1y_1 و c_2y_2 ، حيث c_1 و c_2 اختيارية، كذلك حلول ؟ هل المجموع : y_1+y_2 حل ؟

بين أن الدوال في المسائل من 38- 43 تحقق شرط ليبتشز على المنطقة D المبينة إزاءها؟ ثم احسب ثابت ليبشتز:

38. $f(x,y)=x^2\,y^2+y^4,\ D=\{(x,y):\ |x|\le 1,\ |y-2|\le 3\}$

39. $f(x,y)=y^2,\ D=\{(x,y):\ |x-1|\le 1,\ |y+1|\le 2\}$

40. $f(x,y)=ay+bxy^2+cx^2\,y^3,\ D=\{(x,y):\ |x|\le a,\ |y-b|\le c\}$

41. $f(x,y)=x^2\sin y,\ D=\{(x,y):\ |x|\le \lambda,\ |y|\le 1\}$

42. $f(x,y)=2\,y^2\cos^2 x+|y|\sin x,\ D=\{(x,y):\ |x|\le \pi,\ |y|\le 1\}$

43. $f(x,y)=e^x(1+y)^{-1},\ D=\left\{(x,y):\ |x|\le 1,\ |y|\le \frac{3}{4}\right\}$

استخدم مبرهة وجود الحل و وحدانيته لبيان ما إذا يكون لمسائل القيم الابتدائية (*IVP*) في المسائل من 44 – 46 حل ؟ وهل الحل وحيد؟

44. $y'=1+y^2,\ y(0)=0$ ، 45. $y'=xy^2-x^2,\ y(0)=1$ ،

46. $y'=1+x^2+2xy,\ y(0)=0$.

47. **حدد منطقة في المستوى xy تحوي النقطة (x_0, y_0) يكون للمعادلات التفاضلية الآتية حل وحيد يمر من تلك النقطة :**

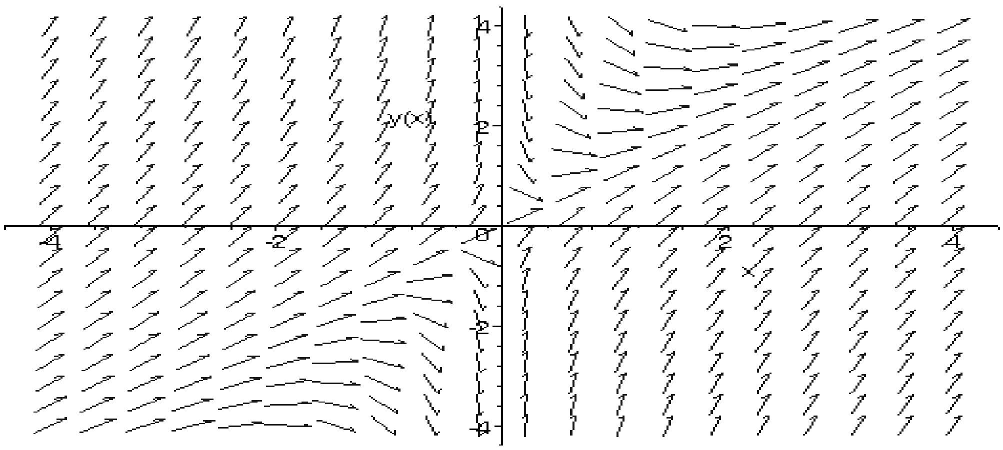
(أ) $\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}}$ ، **(ب)** $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$ ، **(ج)** $x\frac{dy}{dx} = y$ ،

(د) $\frac{dy}{dx} - y = x$ ، **(هـ)** $(4 - y^2)\frac{dy}{dx} = x^2$

لكل من الحقول الاتجاهية في المسائل من 48– 49 تحقق من الرسم باستخدام ميبل ثم ارسم منحنيات حل تقريبية تمر بالنقاط المؤشر أزاءها:

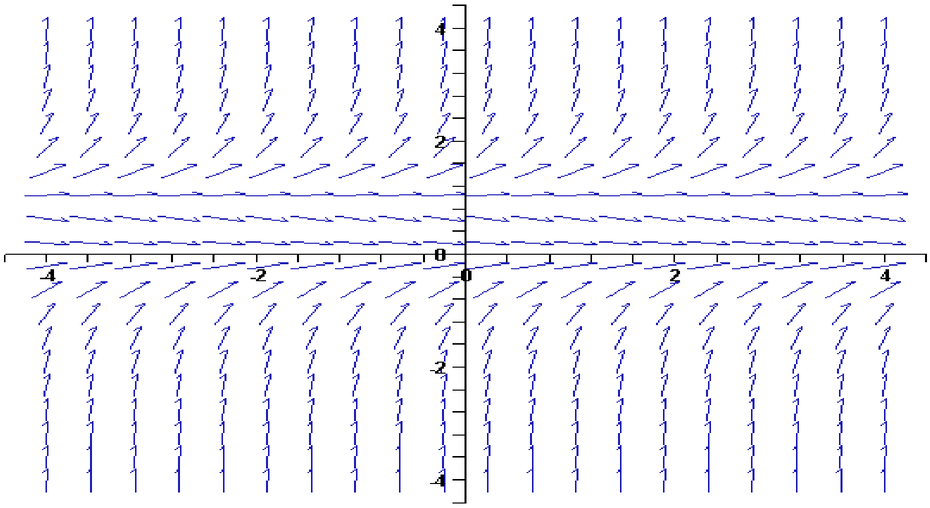
.48 $y' = 2 - \frac{y}{x}$

أ- $y(1) = 0$ **ب-** $y(1) = 2$ **ج-** $y(-1) = 0$ **د-** $y(-1) = -2$



.49 $y' = y(y-1)$

أ- $y(0) = -1$ **ب-** $y(0) = 0$ **ج-** $y(0) = 0.5$ **د-** $y(0) = 1$



ارسم حقلاً اتجاهياً لكل من المعادلات التفاضلية في المسائل من 50 – 57 . ثم ارسم بعض منحنيات حل تقريبية لها:

.50 $\frac{dy}{dx} = 3x - y$

.51 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

.52 $\frac{dy}{dx} = 2y$

.53 $\frac{dy}{dx} = xy$

.54 $\frac{dy}{dx} = x^2 + 2y^2$

.55 $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

.56 $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$

.57 $\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 - y^2$