الفصل العاشر

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الأعتيادية

Numerical solutions of ordinary differential equations

تعود بدايات التحليل العددي الى العالم السويسري ليونهارد أويلر(Leonhard Euler) الذي ولد في بازل وعاش خلال الفترة (1707- 1783م)، تتلمذ على يد برنولي وحصل على كرسي الأستاذية في الفيزياء سنة 1727م ثم حصل على الأستاذية في الرياضيات من أكاديمية سانت بِطرسبرك في روسيا. انتقل الى برلين عام 1741م ليترأس الاكاديمية البروسية هناك ثم عاد الى روسيا سنة 1766م. ساهم في مجالات الرياضيات كافة مع التميز في الرياضيات التطبيقية، التحليل العددي، والفيزياء الى أن أصيب بالعمى سنة 1771م. ساهم في تطوير المعادلات التفاضلية مستخدماً الحلول العددية وسلاسل فورير والتحليل العقدي و الدوال الخاصة وعلم الحركة (Mechanics) ، وحركة الموائع (Hydrodynamics).

كما ساهم في تطوير طرائق الحلول العددية للمعادلات التفاضلية كل من العالمين الألمانيين كارل رونكه (C. Runge) سنة 1895م أستاذ الرياضيات التطبيقية في جامعة جوتنكين (Gottingen) وعاش خلال الفترة (1867-1944م)، و ويأتيام كوتا (W. Kutta) سنة 1901م. اللذين طورا طريقة من الرتبة الرابعة لإيجاد حلول عددية للمعادلات التفاضلية التي ما زالت شائعة الاستخدام وتدعى بطريقة رونكه-كوتا.

10.1 الحلول العددية والطرائق العددية

(Numerical solutions and numerical methods)

توجد معادلات تفاضلية اعتيادية عديدة مثل

$$y'' = xy \quad ، \quad y' = 1 + xy^2$$

تبدو للوهلة الأولى بسيطة ويمكن إيجاد حلها بإحدى الأساليب التحليلية القياسية التي تعرف عليها الطالب سابقاً. ولكن في واقع الحال بالرغم من وجود حل لها فلا يمكن تحويل هاتين المعادلتين إلى أي من هذه الصيغ القياسية، وبالتالي لا يمكن حلها بوساطة تركيب من الدوال المعروفة (جبرية أو مثلثية أو آسية ...). إن هذين المثالين يدلان على ضرورة التعرف على أساليب جديدة لإيجاد حلول تقريبية للمعادلات التفاضلية في حالة وجود حل وحيد لها. وقبل البدء بتقديم هذه الأساليب سنتطرق إلى بعض المفاهيم والأمثلة لتوضيح بعض الأفكار عن الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية و طرائق حلها.

حل تقريبي هندسي

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى

$$y' = f(x, y) \qquad \textbf{(10.1)}$$

تعدّ الدالة $y = y(x)$ حلا للمعادلة (10.1) على الفترة $a \le x \le b$ إذا حققت المعادلة التفاضلية لجميع قيم x الواقعة ضمن الفترة. و كما بينا سابقا أنّ وجود حل وحيد للمعادلة (10.1) يتطلب اقترانها بشرط ابتدائي و تحقيق الدالة f لشرط ليبشتز على الفترة $[a,b]$. لذلك سنفترض الشروط التي تضمن وجود حل وحيد للمعادلة (10.1) قبل البدأ بتقديم الأسلوب الأول لتقريب الحل هندسيا. من الناحية الهندسية يمكن اعتبار الدالة $y = y(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية إذا كان ميل مماس الدالة عند كل نقطة (x, y) مساويا لقيمة $f(x, y)$. على هذا الأساس لكل نقطة نتوقع وجود حل للمعادلة (10.1) يمر بها ويمكن رسم مخططها البياني بإجراء سلسلة من العمليات المكررة. من النقطة (x_0, y_0) نرسم قطعة مستقيم ميلها يساوي $f(x_0, y_0)$ ونهايتها النقطة (x_1, y_1). بعدها نبدأ بالنقطة (x_1, y_1) ونرسم قطعة مستقيم أخرى ميلها يساوي قيمة $f(x_1, y_1)$ ونهايتها (x_2, y_2). نكرر العملية السابقة لنحصل على مضلع رؤوسه النقاط:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$$

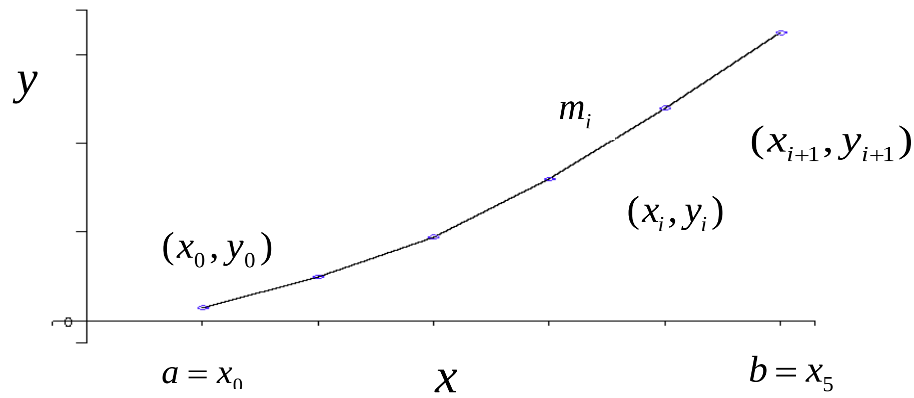
والذي يمكن إعتبارة رسماً بيانياً لحل تقريبي للحل الفعلي الذي يمر بالنقطة (x_0, y_0). ولكي يشمل الحل الفترة $[a,b]$ علينا اختيار $\{x_i\}$ بحيث تكون $x_n = b$ و $x_0 = a$. الشكل (10.1) يحوي مضلعاً يمثل الرسم البياني لحل تقريبي للمعادلة $y' = f(x, y)$ والمار بالنقطة (x_0, y_0)، حيث يتكون من خمس قطع مستقيمة

$$(x_i, y_i) - (x_{i+1}, y_{i+1}) \;\; i = 0,\ 1, \ldots, 4$$

ميلها يحقق

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i, y_i), \qquad i = 0,\ 1, \ldots, 4$$

على التوالي و قد قسمت الفترة الى فترات جزئية متساوية بطول $h = \dfrac{b-a}{5}$ بوساطة النقاط $\{x_i\}$ حيث $x_i = a + ih \; , \; i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 5$.



الشكل (10.1)

المثال (1): ارسم دالة تقريبية لحل المعادلة $y' = -\frac{1}{2}xy^2$ **على الفترة** $[0,3]$ **وتمر بالنقطة** $(0,1)$ **.**

الحل : نفرض $(x_0, y_0) = (0,1)$ **وأن الفترة تقسم الى ثلاث فترات بوساطة النقاط:**

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$

لإيجاد قيمة y_1 **نحسب ميل قطعة المستقيم الواصل بين النقطتين** (x_0, y_0) **,** (x_1, y_1) **أولاً**

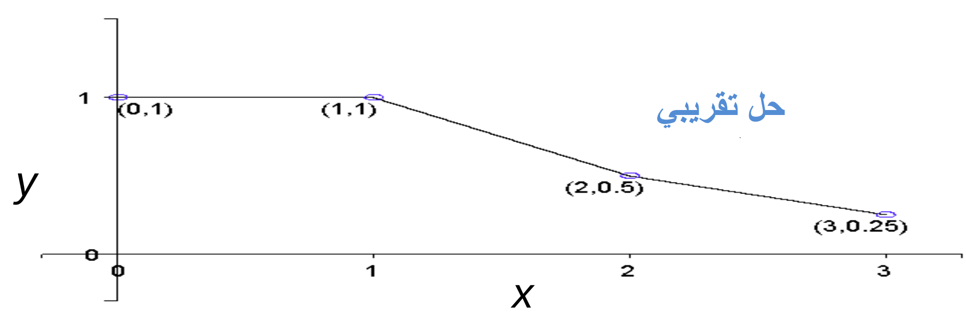
$$m_0 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = 0$$

ومن ثم نجد $y_1 = (x_1 - x_0)m_0 + y_0 = 1$ **وعليه تكون** $(x_1, y_1) = (1,1)$ **.**

نبدأ الان بالنقطة (x_1, y_1) **لنحسب**

$$m_1 = f(x_1, y_1) = -0.5, \qquad y_2 = (x_2 - x_1)m_1 + y_1 = 0.5$$

ومنه نحصل على النقطة $(x_2, y_2) = (2,0.5)$ **وبتكرار هذا الأسلوب نحصل على** $(x_3, y_3) = (3,0.25)$ **و بذلك يكون الرسم البياني للحل التقريبي كالاتي:**

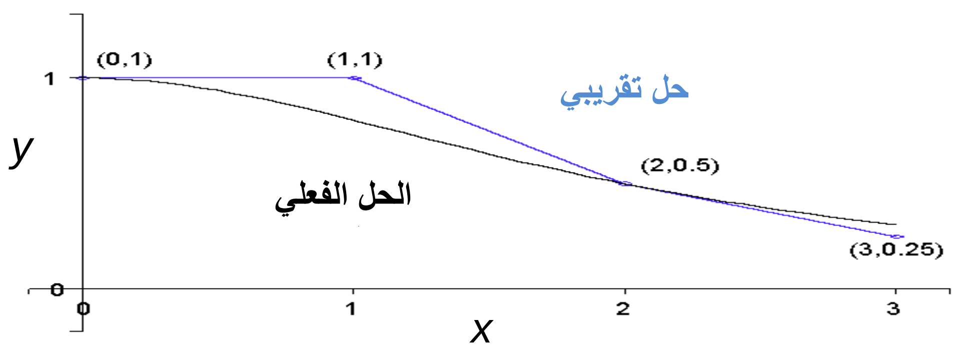


الشكل (10.2)

عند مقارنة الحل التقريبي في المثال السابق مع الحل الفعلي المتمثل بالدالة

$$y(x) = \frac{4}{4 + x^2}$$

والذي يمكن للطالب إيجاده باستخدام طريقة فصل المتغيرات، نلاحظ أنّ حجم الخطأ كبير نسبياً. أنظر الشكل (10.3).



الشكل (10.3)

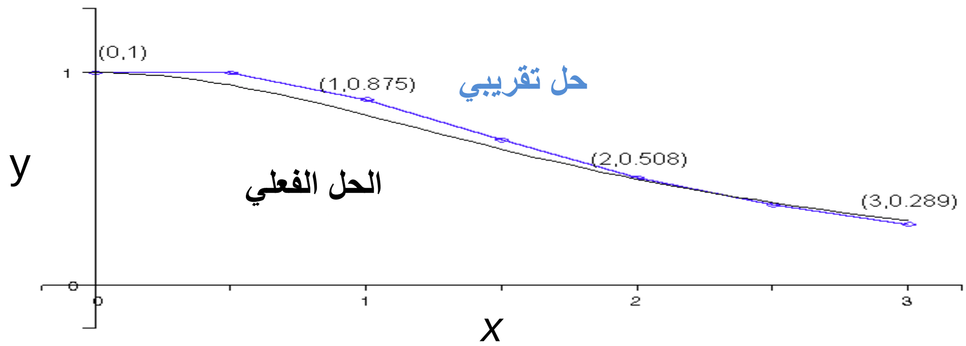
للحصول على حل تقريبي أفضل يمكن زيادة عدد النقاط ، لاحظ الشكل (10.4) ، أي تقسيم الفترة

$[0,3]$ **إلى عدد أكبر من الفترات الجزئية، و لتكن 6 ، لنحصل على طول الجزء** $h = 0.5$**. وعليه تكون نقاط التقسيم**

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 1.5 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = 2.5 \quad x_6 = 3$$

بتكرار الأسلوب السابق نفسه بدءاً بالنقطة $(x_0, y_0) = (0,1)$ **نحصل على النقاط**

$$(x_1, y_1) = (0.5 \ , \ 1.000) \qquad (x_2, y_2) = (1 \ , \ 0.875)$$
$$(x_3, y_3) = (1.5 \ , \ 0.684) \qquad (x_4, y_4) = (2 \ , \ 0.508)$$
$$(x_5, y_5) = (2.5 \ , \ 0.379) \qquad (x_6, y_6) = (3 \ , \ 0.289)$$



الشكل (10.4)

<u>حل تقريبي متسلسل</u>

في المثال الآتي سنستعرض أسلوبا أخر لتوليد حلول تقريبية للمعادلات التفاضلية على شكل متسلسلات.

المثال (2):

لإيجاد حلول تقريبية لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = 1 + xy^2, \quad y(0) = 0$$

نفرض أنّ $y_1, \ y_2, \ y_3, \ \ldots$ **دوال تقريبية لحل المعادلة وأنها تحقق الصيغة التكرارية**

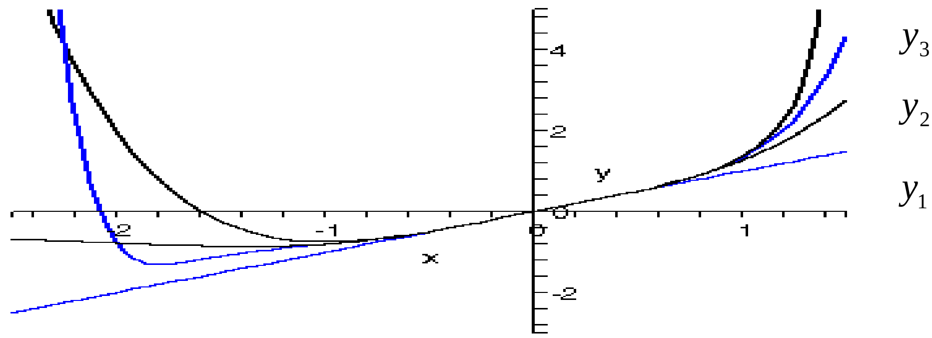
$$y'_{n+1} = 1 + xy_n^2, \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

فإذا اخترنا $y_0 = 0$ **فإنّ** $y'_1 = 1$ **وبإجراء عملية التكامل نحصل على التقريب الأول** $y_1 = x$. **و باستخدام الصيغة التكرارية نحصل على** $y'_2 = 1 + xy_1^2 = 1 + x^3$ **ومنه نحصل على التقريب الثاني** $y_2 = x + \frac{1}{4}x^4$ **. وهكذا يمكن الحصول على تقر يبات على شكل متسلسلات. التقريب الثالث سيكون** $y'_3 = 1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{16}x^9$ **ومنه نحصل على**

$$y_3 = x + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{160}x^{10}$$

ومن الجدير بالذكر عند استخدام هذا الأسلوب لإيجاد حلول تقريبية على شكل متسلسلات علينا فحص تقارب هذه المتسلسلات. على العموم يمكن استخدام هذا الأسلوب عندما لا يكون الحل مطلوباً على فترات كبيرة نسبيا بل لفترات صغيرة حول القيمة الابتدائية x_0 **. والشكل (10.5) يوضح ذلك.**

$$y = y(x)$$



الشكل (10.5)

هنالك أساليب أخرى عديدة تعتمد التكرار لإيجاد الحلول العددية بدقة أفضل، تختلف بتركيباتها و دقة نتائجها و تشترك بما يأتي:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية ذات الشرط الابتدائي

$$y' = f(x, y), \qquad y(a) = \eta \qquad \textbf{(10.2)}$$

ومطلوب حل هذه المعادلة على الفترة $[a,b]$. إنّ جميع الطرائق العددية تتعامل مع عدد محدد من نقاط الفترة $[a,b]$ وتعطي قيماً تقريبية للحل الفعلي عند هذه النقاط. لذلك تعرف أولاً متتابعة من القيم $\{x_n\}$ بحيث $Nh = b - a$ ، $n = 0,1,\ldots,N$ ، $x_n = a + nh$. أي أن الفترة $[a,b]$ تجزأ بوساطة المتتابعة $\{x_n\}$ إلى N من الأجزاء، طول كل جزء منها يساوي h . ويطلق على هذه العملية التقطيع أو التجزئة (Discretization) وبعد ذلك تحسب بصورة تكرارية متتابعة من القيم $\{y_n\}_1^N$ تعتمد على طول الخطوة h حيث y_n قيمة تقريبية لقيمة الحل الفعلي $y = y(x_n)$ عندما $n = 0,1,\ldots,N$. ويطلق على متتابعة القيم التقريبية $\{y_n\}_1^N$ بالحل العددي. أما الصيغة التكرارية التي تولد هذه المتتابعة فتسمى بالطريقة العددية. والشكل (10.4) يوضح ذلك عندما $N = 6, \ a = 0, \ b = 3$.

بعد أن استعرضنا مفهومي الحل العددي و الطريقة العددية علينا البحث عن الاجابة على سؤالين مهمين: الأول كيف نعرف دقة الحل العددي؟ و الثاني كيف نحصل على حل عددي أفضل عند الحاجة لذلك؟ سنجيب عن السؤال الثاني في المبحث القادم، أما الأجابة عن السؤال الأول فمرتبطة بالطريقة العددية المستخدمة و ستذكر لاحقا.

<u>تقارب الحلول العددية</u>: (Convergence of numerical solutions)

بما أن أي طريقة عددية تولد متتابعة من التقريبات $\{y_n(h)\}_1^N$ لكل اختيار لطول الخطوة h فيمكننا اختبار تقارب الحل العددي إلى الحل الفعلي عند كل نقطة x_n من نقاط تجزئة الفترة $[a,b]$. ولكن لتسهيل مهمة اختبار التقارب يمكننا الاعتماد على المتتابعة $\{y_N(h)\}$ التي تمثل الحلول العددية التي نحصل عليها عند نهاية الفترة $[a,b]$ لقيم مختلفة لطول الخطوة h. يجب أن لا ننسى أنّ $Nh = b-a$ ، وبذلك فإنّ

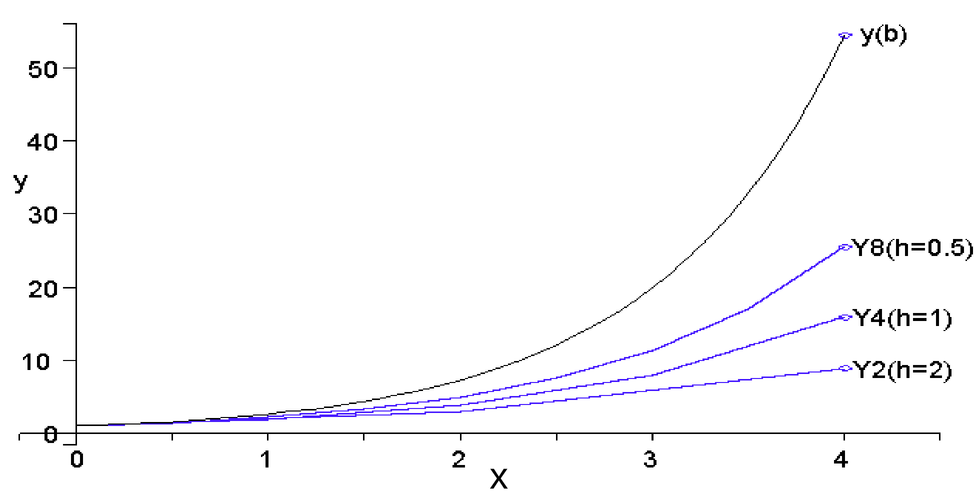
$$x_N = a + Nh = b$$

أي إن $y_N(h)$ تقريب لقيمة الحل الفعلي $y(x_N)$ والذي يساوي $y(b)$.

التعريف (10.1): يقال للطريقة العددية أنّها متقاربة إذا كانت تولد متتابعة $\{y_N(h)\}$ بحيث

$$\lim_{N\to\infty} y_N(h) = y(x_N) \qquad \textbf{(10.3)}$$

لاحظ في التعريف السابق اعتبار التقارب عند x_N وهي قيمة ثابتة تساوي نهاية الفترة b. ويمكن للطالب ان يستدل تقارب الحلول العددية عند بقية نقاط تجزئة الفترة $[a,b]$ كما موضح في الشكل (10.6).



الشكل (10.6)

تعتبر خاصية التقارب من الخواص المهمة للطرائق العددية فبوساطتها نستطيع أن نتأكد من الحصول على حلول عددية أفضل عند تصغير قيمة طول الخطوة h، أي إن الطرائق العددية المتقاربة تعطي حلول عددية دقيقة في حالة إختيار خطوة طولها صغير جداً. ولكن يجب أن نتذكر أنّ عدد نقاط التجزئة $\{x_n\}_1^N$ سيكون كبيراً في هذه الحالة لأن $Nh = b-a$ ، وبذلك ستزداد العمليات الحسابية، و عليه قد تتولد أخطاء من نوع اخر سنتطرق اليها لاحقا.

10.2 طرائق أُويلر العددية (Euler methods)

تعد طرائق أُويلر من أقدم الوسائل العددية لإيجاد الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية ذات الشرط الابتدائي و أبسطها " طريقة أُويلر الصريحة "
(Explicit Euler method) ، حيث استخدمها أُويلر(Euler) للتكاملات العددية واستخدمها كوشي (Cauchy) في مبرهنة لوجود حل للمعادلات التفاضلية الاعتيادية ذات الشرط الابتدائي.
ليكن $y = y(x)$ **حلا للمعادلة التفاضلية (10.2)، أي مسألة القيمة الابتدائية** $y' = f(x, y), \;\; y(a) = \eta$ **حيث** $y(x)$ **دالة قابلة للاشتقاق المستمر على الفترة** $[a,b]$**. لتكن نقاط التجزئة**

$$x_n = a + nh \;\; , \;\; n = 0, \; 1, \; 2, \; \ldots \; N \;\; , \;\; Nh = b - a$$

بتطبيق مفكوك تايلور على $y(x_{n+1})$ **حول** x_n **نحصل على**

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n + h) \\ &= y(x_n) + hy'(x_n) + \ldots.. \\ &= y(x_n) + hf\big(x_n, y(x_n)\big) + \ldots\ldots \end{aligned}$$

وإذا اعتبرنا y_n **تقريب لقيمة الحل الفعلي** $y(x_n)$ **وبترنا مفكوك تايلور بعد الحد الثاني سنحصل على الصيغة التكرارية الآتية لتقريب الحل الفعلي:**

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \;\; n = 0, \; 1, \; 2, \; \ldots \; , \;\; N \qquad \textbf{(10.4)}$$

وهى في الحقيقة الصيغة نفسها التي استخدمت في المثال (1) من البند (10.1). تعتمد طريقة أُويلر الصريحة على الصيغة التكرارية (10.4) في توليد متتابعة الحل العددي و الذي يعتمد على طول الخطوة h **المختار، و من الواضح أنّها تحتاج إلى القيمة الابتدائية** y_0 **لتوليد التقريبات الأخرى، وبما أن** y_0 **تمثل تقريباً لدالة الحل** $y(x)$ **عند** $x = a$ **فيمكن إعطاء قيمة الشرط الابتدائي** η **إلى** y_0**.**

<u>خوارزمية أُويلر الصريحة:</u>

تتبع الخطوات الآتية عند استخدام طريقة أُويلر الصريحة.

1. **قراءة حدود فترة الحل a و b وعدد فترات التجزئة** N**.**
2. **حساب طول الفترة الجزئية** $h = (b - a) / N$**.**

3. وضع $x_0 = a$ و $y_0 = \eta$.

4. حساب x_1 و y_1 حيث $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ $\quad x_1 = x_0 + h,$.

5. طبع x_1 و y_1.

6. اختبار $x_1 \geq b$ فإذا كان الجواب نعم نتوقف و بخلافه تستبدل x_0 بقيمة x_1 و y_0 بقيمة y_1 ، أي $x_0 \leftarrow x_1$ و $y_0 \leftarrow y_1$ ثم الانتقال إلى الخطوة (4).

المثال (1): استخدم طريقة أُويلر الصريحة بخطوة طولها $h = 2$ لإيجاد حل عددي للمعادلة $y(0) = 1 \qquad y' = xy/10,$ على الفترة $[0,10]$. جد الحلول التقريبية عندما $h = 2,\ 1,\ 0.5$ على التوالي. قارن بين النتائج التي ستحصل عليها والحل الفعلي.

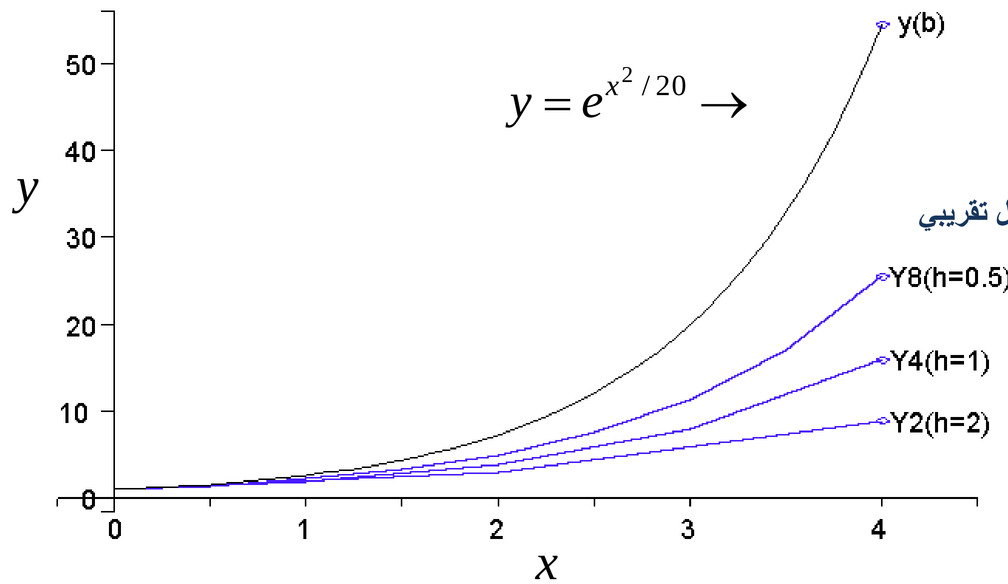
الحل: لإيجاد عدد الفترات N اللازمة للحصول على طول الخطوة $h = 2$ علينا استخدام العلاقة $Nh = b - a$ ، أي

$$N = \frac{b-a}{h} = \frac{10-0}{2} = 5$$

الجدول الآتي يحوي الحل العددي الناتج من تطبيق خوارزمية أويلر الصريحة بإدخال بيانات المسألة $a = 0,\ b = 10,\ N = 5$ حيث $f(x_n, y_n) = (x_n . y_n) \big/ 10$.

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$hf(x_n, y_n)$
0	0	1.000	0.000	0.000
1	2	1.000	0.200	0.400
2	4	1.400	0.560	1.120
3	6	2.520	1.512	3.024
4	8	5.544	4.435	8.870
5	10	14.41		

والشكل الآتي يبين الفرق بين الحل العددي و الحل الفعلي $y = e^{x^2/20}$ الذي يمكن للطالب أن يجده باستخدام طريقة فصل المتغيرات.

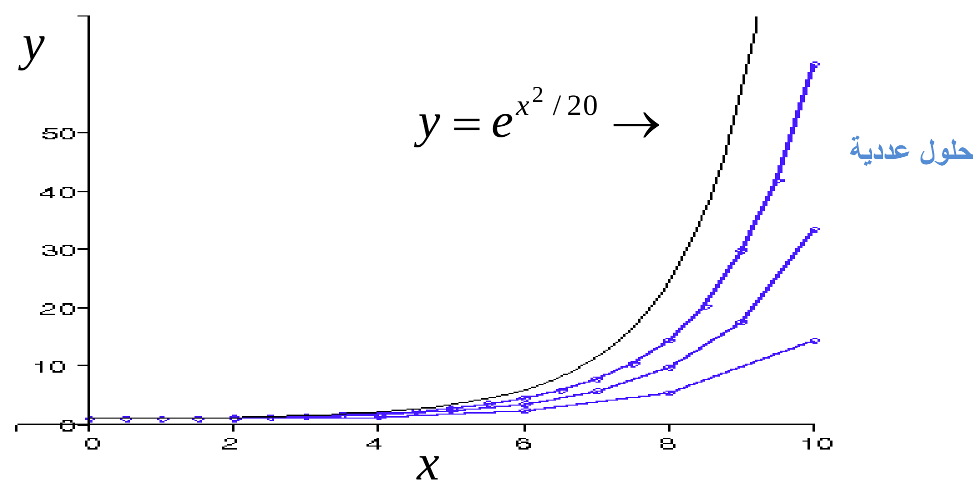


الشكل (10.7)

و عندما $h=1$ يكون عدد الفترات الجزئية $N=\dfrac{b-a}{h}=\dfrac{10-0}{1}=10$. وبتطبيق خوارزمية أويلر الصريحة نحصل على الحل العددي الأتي:

n :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_n :	1.00	1.10	1.32	1.72	2.40	3.60	5.77	9.80	17.64	33.52

أما لبقية قيم h فنكتفي بعرض الشكل الاتي حيث يبين المقارنة بين الحلول العددية التي حصلنا عليها عند تطبيق الخوارزمية باستخدام أطوال مختلفة للخطوة h و الحل الفعلي للمسألة .



الشكل (10.8)

ماذا يلاحظ الطالب في الشكل (10.8) عن العلاقة بين طول الخطوة h و دقة الحل العددي؟

التمثيل الهندسي لطريقة أوُيلر الصريحة

لتوضيح عمل طريقة أوُيلر الصريحة يمكن تمثيلها هندسياً كما يأتي:

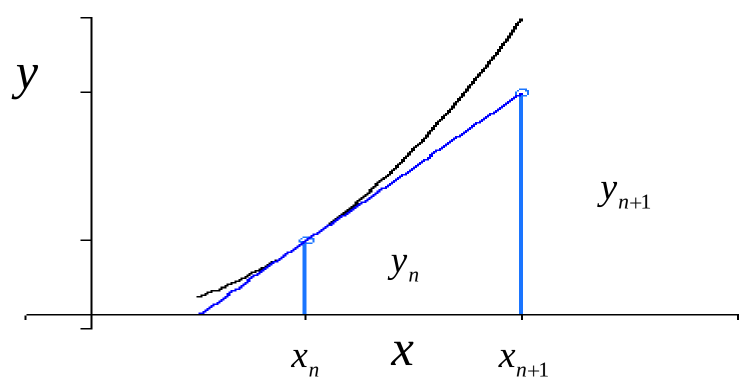
ليكن y_n تقريباً لقيمة دالة الحل $y(x_n)$ عند بداية الخطوة n، أي الفترة الجزئية $[x_n, x_{n+1}]$. يرسم مستقيم من النقطة (x_n, y_n) موازياً لمماس الدالة $y = y(x)$ عند $(x_n, y(x_n))$، بذلك يكون ميله مساوياً لميل دالة الحل، أي $y'(x_n)$، ليقطع العمود عند x_{n+1} على ارتفاع y_{n+1} (لاحظ الشكل 10.9) ، أي أن

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = y'(x_n)$$

وبما أن $h = x_{n+1} - x_n, \;\; y'(x_n) \cong f(x_n, y_n)$ نحصل على

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

وهي الصيغة التكرارية نفسها التي وردت سابقاً.



الشكل (10.9)

الخطأ الموضعي المبتور ورتبة الطريقة العددية

يقصد بالخطأ الموضعي المبتور حجم الخطأ الناتج من استخدام طريقة عددية مرة واحدة على فرض استعمال قيمة فعلية للحل في بداية الخطوة. لتعريف الخطأ الموضعي المبتور بصورة عامة توجد فرضيتان الأولى مساواة القيمة العددية لحل المعادلة التفاضلية في بداية الخطوة للقيمة الفعلية للحل عند تلك النقطة، أي $y_n = y(x_n)$ ، بذلك تكون قيمة الحل العددي عند نهاية الخطوة n والناتجة من استخدام طريقة أويلر الصريحة

$$y_{n+1} = y(x_n) + hf\big(x_n, y(x_n)\big) = y(x_n) + hy'(x_n)$$

والثانية تتعلق بعدد الحدود التي نحتاجها لتوسيع الحل الفعلي بوساطة صيغة تايلور بغية مقارنته مع الحل العددي الناتج من استخدام الطريقة العددية لخطوة واحدة فقط. بالنسبة لطريقة أوُيلر الصريحة نحتاج إلى ثلاثة حدود، وبذلك علينا فرض قابلية الاشتقاق المستمر للرتبة الثانية بالنسبة لدالة الحل الفعلي، أي $y \in C^2[a,b]$ ، لنحصل من صيغة تايلور على مفكوك الحل الفعلي عند نهاية الخطوة x_{n+1} حول بداية الخطوة x_n .

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(\theta_n) \quad , \quad x_n \le \theta_n \le x_{n+1}$$

بمقارنة الحل العددي الناتج من تطبيق طريقة أُويلر الصريحة لخطوة واحدة مع مفكوك تايلور للحل الفعلي يتضح تطابق حدود الحل العددي مع الحدين الأول والثاني على التوالي. أي أن

$$y(x_{x+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2!} y''(\theta_n), \qquad x_n \le \theta_n \le x_{n+1}$$

التعريف (10.2): يسمى الفرق $y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ في المعادلة السابقة بالخطأ الموضعي المبتور عند x_{n+1} (وذلك بفرض $y_n = y(x_n)$). ويقال إنّ رتبة الطريقة العددية تساوي p إذا حقق الخطأ الموضعي المبتور المتراجحة الآتية:

$$\left| y(x_{x+1}) - y_{n+1} \right| \le k\ h^{p+1}, \qquad n = 0,1,\ldots, N-1 \qquad \textbf{(10.5)}$$

من المعادلة السابقة، وبما أن $y \in C^2[a,b]$ يوجد k بحيث

$$\left| \frac{1}{2!} y''(\theta_n) \right| \le k, \qquad n = 0,1,\ldots, N-1$$

تتحقق المتراجحة:

$$\left| y(x_{x+1}) - y_{n+1} \right| \le kh^2, \qquad n = 0,1,\ldots, N-1 \qquad \textbf{(10.6)}$$

وبذلك تكون طريقة أويلر الصريحة ذات رتبة $p = 1$.

هناك أسلوب أخر لتعريف رتبة الطريقة العددية يعتمد على تعريف مؤثر خطي يرتبط بالطريقة العددية. فبالنسبة لطريقة أويلر الصريحة يعرف هذا المؤثر كالآتي:

$$\lambda(y(x_n), h) = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hy'(x_n) \qquad \textbf{(10.7)}$$

وعلى ضوء ذلك يقال للطريقة العددية أنّها ذات رتبة p إذا تحقق مايأتي:

$$\left|\lambda(y(x_n),h)\right| \le kh^{p+1} \qquad \textbf{(10.8)}$$

من الممكن التأكد من أن هذا التعريف سيعطي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها سابقاً بالنسبة لرتبة طريقة أويلر الصريحة وهي $p=1$. بالإضافة إلى ذلك وبالمقارنة مع المتراجحة (10.6) يتبين أنّ $\lambda(y(x_n),h)$ يساوي الخطأ الموضعي المبتور عند x_{n+1} وأن

$$\left|\lambda(y(x_n),h)\right| \le kh^2 \ , \ y\in C^2[a,b] \qquad \textbf{(10.9)}$$

<u>**الخطأ الإجمالي المبتور وتقارب الطريقة العددية**</u>

لقد سبق أن إعتبرنا تقارب الطرائق العددية عند نقطة ثابتة x_N تمثل نهاية الفترة $[a,b]$ المطلوب فيها أيجاد حل مسألة القيمة الابتدائية $y' = f(x,y),\ \ y(a)=\eta$. نفرض أنّ $y\in C[a,b]$ وأن f تحقق شرط ليبشتز:

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right| \qquad \forall\, y_1, y_2 \in R, \qquad x\in[a,b]$$

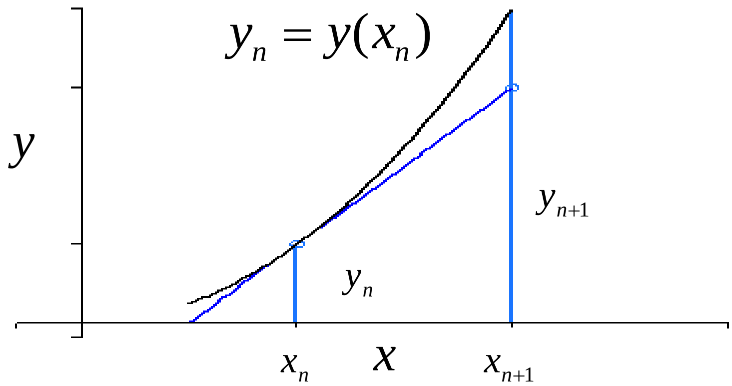
عند استخدام طريقة اويلر الصريحة بخطوة طولها معين h نحصل على متتابعة الحل العددي $\{y_n(h)\}_{n=1}^{N}$ حيث أن

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \qquad x_n = a+nh, \qquad nh = b-a$$

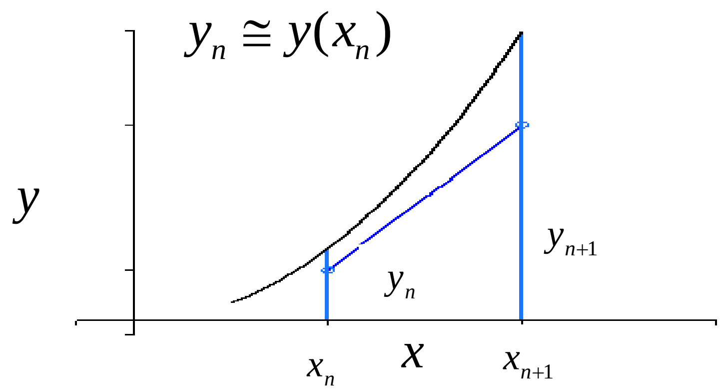
التعريف (10.3): يعرف الخطأ الإجمالي المبتور عند x_{n+1} بالفرق بين القيمة الفعلية للحل عند x_{n+1} والقيمة العددية التي نحصل عليها من الطريقة العددية عند الخطوة n، أي

$$E_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} \qquad \textbf{(10.10)}$$

لاحظ عدم وجود الفرضية $y_n = y(x_n)$، وهذا يبين الفرق بين الخطأ الاجمالي والخطأ الموضعي المبتور، كما مبين في الشكلين (10.10) و (10.11) الآتيين:



الشكل (10.10) - الخطأ الموضعي المبتور



الشكل (10.11) - الخطأ الاجمالي المبتور

ليس من السهل إيجاد قيد أعلى يعتمد على طول الخطوة h للأخطاء الإجمالية المبتورة كما في الأخطاء الموضعية المبتورة. لتسهيل هذه المهمة يمكن إيجاد علاقة بين الخطأ الإجمالي والخطأ الموضعي $\lambda(y(x_n),h)$ عند x_{n+1} المعرف بالمعادلة (10.7) كما يأتي:

$$\begin{aligned}
E_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} \\
&= y(x_{n+1}) - y_n - hf(x_n, y_n) \\
&= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hy'(x_n) + y(x_n) - y_n \\
&\qquad\qquad + hf(x_n, y(x_n)) - hf(x_n, y_n) \\
&= \lambda(y(x_n),h) + E_n + h\{f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)\}
\end{aligned}$$

وبما أن طريقة اويلر الصريحة من الرتبة الأولى (لاحظ المتراجحة 10.9) وأن f تحقق شرط ليبشتز نحصل على

$$|E_{n+1}| \le kh^2 + |E_n| + hL|E_n|, \qquad n = 0,1,\ldots, N-1 .$$

وباستخدام مفكوك تايلور للدالة e^{hL} نحصل على المتراجحة $1+hL \le e^{hL}$، ثم نستنتج بالاستقراء الرياضي أنّ

$$|E_1| \le e^{nhL}\left(|E_0| + nkh^2\right), \qquad n = 0,1,\dots,N$$ ،

وبذلك نحصل على القيد الآتي للخطأ الإجمالي المبتور عند $(b = x_n)$:

$$|E_N| \le e^{NhL}\left(|E_0| + Nkh^2\right) = e^{(b-a)L}\left(|E_0| + (b-a)kh\right) \qquad \textbf{(10.11)}$$

نلاحظ أنّ هذا القيد يتكون من حدين الأول يعتمد على القيمة العددية الابتدائية $y_0(h)$ المختارة ولا يظهر عند اختيارنا $y_0 = \eta$. أما الحد الثاني فيتولد من الخطأ الموضعي المبتور ولكنه مقيد بطول الخطوة h. نستنتج من قيد الخطأ الإجمالي المبتور التعريف الآتي حول تقارب طريقة أويلر الصريحة.

التعريف (10.4) : تقارب طريقة أويلر الصريحة

عند اختيارنا للقيم الابتدائية $\{y_0(h)\}$ بحيث تقترب من القيمة الابتدائية $y(a) = \eta$ فإنّ طريقة اويلر تولد المتتابعة $\{y_N(h)\}$ بحيث

$$\lim_{N\to\infty} y_N(h) = y(x_N), \qquad Nh = b - a$$

<u>استكمال الحلول العددية</u> (Extrapolation)

لقد بينا سابقاً أنّ طريقة أويلر الصريحة متقاربة ولذلك نتوقع الحصول على حلول عددية افضل للمعادلة التفاضلية $y' = f(x,y), \quad y(a) = \eta$ على الفترة $[a,b]$ إذا زدنا عدد نقاط التجزئة ، من ناحية أخرى إذا اخترنا طول الفترات الجزئية h صغير جدا ستزداد عدد العمليات الحسابية بشكل كبير مما يؤدي الى وقت حسابي أكبر، وكذلك قد تؤثر أخطاء التدوير (الأخطاء الناجمة عن إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المقربة لعدد منتهٍ من الأرقام) على النتائج النهائية. لتجاوز هذه المحنة يمكن توظيف بعض القيم التقريبية الناتجة من استخدام طريقة أويلر بأطوال مختلفة للخطوة h للحصول على قيم تقريبية عالية الدقة للحل. تسمى هذه العملية بالاستكمال.

ليكن المطلوب تخمين قيمة حل المعادلة التفاضلية $y = y(x)$ عند نهاية الفترة $x = b$.

نفرض أنّ الحل قابل للاشتقاق المستمر للرتبة $k+1$ ، أي أن $y \in c^{k+1}[a,b]$ ، وان y_0

تساوي القيمة الفعلية $y(a)$ ، أي القيمة الابتدائية للمعادلة التفاضلية. فإنّه يمكن أن نتبين أنّ الحل العددي الذي نحصل عليه بطريقة أويلر الصريحة عند نهاية الفترة $y_0=\eta$ يحقق الصيغة آلاتية:

$$y_N(h)=y(x_N)+a_1h+a_2h^2+....+a_kh^k + R_{k+1}(h),\ \left|R_{k+1}(h)\right|\le ch^{k+1} \quad \textbf{(10.12)}$$

حيث c عدد ثابت و $\{a_i\}$ ثوابت لا تعتمد على h. تسمى المعادلة أعلاه بتوسيع محاذٍ (Asymptotic expansion) للحل العددي.

يعتمد الاستكمال على تطبيق طريقة أويلر على المعادلة التفاضلية لقيم مختلفة لطول الخطوة وبالتالي استكمال هذه القيم للحصول على قيم تقريبية جديدة لا يحتوي الخطأ فيها على حد يظهر فيه h ويمكن تكرار العملية بالنسبة للقيم الجديدة للحصول على قيم أخرى، الخطأ فيها لا يحتوي على الحد h^2 وهكذا... . لنفرض أنّ طريقة أويلر استخدمت بثلاثة أطوال للخطوة h، $\frac{h}{2}$، $\frac{h}{4}$، على التوالي، بذلك من المعادلة (10.12) نحصل على

$$y_N(h)=y(b)+a_1h+a_2h^2+....+a_kh^k+R_kh^k+R_{k+1}(h)$$
$$y_{2N}(h)=y(b)+a_1\frac{h}{2}+a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2+....+a_k\left(\frac{h}{2}\right)^k+R_{k+1}(\frac{h}{2})$$
$$y_{4N}(h)=y(b)+a_1\frac{h}{4}+a_2\left(\frac{h}{4}\right)^2+....+a_k\left(\frac{h}{4}\right)^k+R_{k+1}(\frac{h}{4})$$

ومن المعادلات السابقة ينتج

$$2y_{2N}(\frac{h}{2})-y_N(h)=y(b)-a_2\frac{h}{2}^2-a_3\frac{3h^3}{2}.....$$
$$2y_{4N}(\frac{h}{4})-y_{2N}(h)=y(b)-a_2\frac{h}{8}^2-a_3\frac{3h^3}{32}.....$$

أي أننا قد حصلنا على قيم تقريبية جديدة يحتوي الحد الأول في متسلسلة خطئها على h^2.

لتكرار الاستكمال بالنسبة للمعادلة الجديدة نستخدم الرموز الآتية:

$$Z_{11} = y_N(h)$$

$$Z_{21} = y_{2N}(\frac{h}{2}) \qquad Z_{22} = 2Z_{21} - Z_{11}$$

$$Z_{31} = y_{2^2 N}(\frac{h}{2^2}) \qquad Z_{32} = 2Z_{31} - Z_{21}$$

نستطيع الآن استكمال القيمتين الأخيرتين لنحصل على

$$Z_{33} = \frac{2^2 Z_{32} - Z_{22}}{2^2 - 1} = y(b) + a_3 \frac{h^3}{8} + \ldots.$$

والخطأ فيها يبدأ بحد يحتوي على h^3. للحصول على قيمة تقريبية صحيحة لدقة عالية يمكن تعميم أسلوب الاستكمال السابق حسب الخوارزمية الآتية:

خوارزمية استكمال ريجاردسون (Richardson extrapolation)

تتبع الخطوات الآتية:

1. **نقرأ معلمات المسألة:** $a,\ b,\ y_0,\ N,\ k$
2. **للقيم** $i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, k$ **نحسب** $h = \dfrac{b+a}{N}$ **ثم نستخدم طريقة اويلر الصريحة لتوليد** $y_1, y_2, \ldots. y_N$ **ونضع** $Z_{i1} = y_N$ **و** $N = 2N$
3. **نحسب المقادير**

$$Z_{i+1, j+1} = \frac{2^j Z_{i+1,j} - Z_{ij}}{2^j - 1}$$

للقيم $j = 1,2,\ldots.,k$ $\qquad i = j, j+1, \ldots., k,$

بتطبيق خوارزمية استكمال ريجاردسون نحصل على أفضل قيمة عددية $Z_{k+1,k+1}$ لتخمين قيمة $y(b)$ حيث يحقق الخطأ فيها المتراجحة:

$$\left| Z_{k+1,k+1} - y(b) \right| \le c_1 \ \frac{h^{k+1}}{2^{k+1}}$$

حيث c_1 عدد ثابت.

المثال (2): استخدم طريقة أويلر الصريحة لتخمين قيمة $y(1)$ باعتماد عدد الفترات الجزئية ، حيث $y(0)=1 \quad y'=-y/(x+1),$ ، ثم استخدم استكمال ريجاردسون للحصول على تخمينات أفضل لقيمة $y(1)$.

الحل: بما أن

$$x_n = 0+nh = nh, \quad f_n = -y_n/(1+x_n), \quad n=0,1,\ldots..,N, \quad Nh=1$$

و $y_{n+1} = y_n + hf_n$ **بتطبيق خوارزمية ريجاردسون نحصل على ما يأتي:**

عندما $N=1$ **يكون طول الخطوة** $h=1$ **لتخمين قيمة** $y(1)$

x_n	y_n	f_n
0	1	-1
1	0	

وعندما $N=2$ **يكون طول الخطوات** $h=\frac{1}{2}$

x_n	y_n	f_n
0	1	-1
$1/2$	$1/2$	$-1/3$
1	$1/3$	

أما عندما $N=4$ **فيكون طول الخطوات** $h=\frac{1}{4}$

x_n	y_n	f_n
0	1	-1
$1/4$	$3/4$	$-3/5$
$1/2$	$3/5$	$-2/5$
$3/4$	$1/2$	$-2/7$
1	$3/7$	

بذلك حصلنا على ثلاث قيم تقريبية لقيمة حل المعادلة التفاضلية عند $x=1$ **. ونستطيع الآن استخدام استكمال ريجاردسون للحصول على قيم تقريبية افضل**

h	y_n		
1	0		
$1/2$	$1/3$	$2/3$	
$1/4$	$3/7$	$11/21$	$10/21$

بالمقارنة مع القيمة الفعلية $y(1)=1/2$ للحل يتضح أنّ أفضل تقريب حصلنا عليه هو أخر قيمة في جدول الاستكمال الأخير وهي $\frac{10}{21}$.

طريقة أويلر الضمنية: (Implicit Euler method)

عند اشتقاق طريقة أويلر الصريحة اعتمدنا مفكوك تايلور لقيمة الحل الفعلي $y(x_{n+1})$ عند x_n. لغرض اشتقاق طريقة أويلر الضمنية نفرض أنّ $y(x)$ هو حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(x,y), \quad y(a)=\eta \qquad \text{حيث} \qquad y(x)\in C^1[a,b]$$ ،

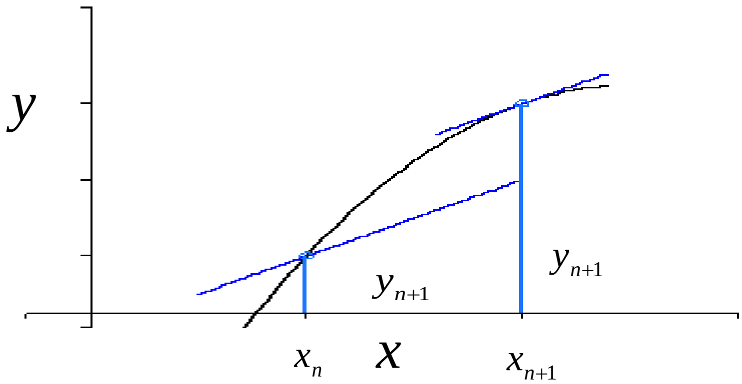
وأن $x_n = a+nh, \ \ n=0,1,\dots,N$ ، $Nh=b-a$. باستخدام مفكوك تايلور للدالة $y(x_n)$ عند x_{n+1} نحصل على:

$$\begin{aligned} y(x_n) = y(x_{n+1}-h) &= y(x_{n+1}) - hy'(x_{n+1}) + \dots. \\ &= y(x_{n+1}) - hf(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + \dots \end{aligned}$$

وهذا يعطينا طريقة أويلر الضمنية

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \qquad n=0,1,\dots,N-1 \qquad \textbf{(10.13)}$$

يمكن تمثيل طريقة أويلر الضمنية هندسياً بشكل مشابه للتمثيل الهندسي لطريقة أويلر الصريحة ولكن باعتماد المماس للحل الفعلي عند x_{n+1} بدلاً من x_n. أي يرسم من النقطة (x_n, y_n) مستقيم موازٍ لمماس الحل الفعلي عند x_{n+1} ليقطع العمود المقام من x_{n+1} في y_{n+1}. انظر الشكل (10.12):



الشكل (10.12)

أما رتبة و خاصية التقارب لطريقة أويلر الضمنية فلا يمكن التعامل معهما بالسهولة التي تم بها مع طريقة أويلر الصريحة. على العموم فإنّ طريقة أويلر الضمنية تحقق خاصية التقارب و رتبتها $p=1$.

<u>تطبيق طريقة أويلر الضمنية</u>

تعطينا طريقة أويلر الضمنية التقريبات

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \qquad n = 0,1,\ldots, N-1$$

بما أن x_{n+1} و y_n تكون معلومة في بداية الخطوة n فإنّ هذه المعادلة تعدّ غير خطية إذا كانت f دالة غير خطية بالمتغير y_{n+1} . وبالإمكان كتابة المعادلة بالصيغة

$$y_{n+1} = g(y_{n+1}) = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

حيث $g: R \to R$. وبما أن f يحقق شرط ليبشتر بثابت L فإنّ

$$\left|g(v) - g(w)\right| = \left|h\left(f(x_{n+1}, v) - f(x_{n+1}, w)\right)\right| \le hL\left|v - w\right|,$$
$$, \quad \forall v, w \in R$$

وهذا يعني أنّ الدالة g تحقق شرط ليبشتز بثابت hL. وعليه فإنّ الشرط $hL<1$ يضمن تقارب القيم المولدة من تكرار النقطة الصامدة (Fixed point)

$$y_{n+1}^{(i+1)} = g\left(y_{n+1}^{(i)}\right), \qquad i = 0,1,\ldots$$

حسب مبرهنة النقطة الصامدة، التي تضمن وجود حل للمعادلة غير الخطية $x = g(x)$ و لمزيد من التفاصيل يمكن للطالب الرجوع الى المصدر [1] . بهذا الأسلوب يمكن الحصول على قيمة تقريبية $y_{n+1}^{(m)}$ لقيمة y_{n+1} بعدد محدود من التكرارات

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + hf\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(i)}\right), \qquad i = 0,1,\ldots,m-1$$

من المعلوم حاجة هذا الأسلوب إلى القيمة الابتدائية $y_{n+1}^{(0)}$ **؛ وللحصول عليها بإمكاننا استخدام طريقة أويلر الصريحة**

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right)$$

يسمى هذا الأسلوب في تطبيق طريقة أويلر الضمنية بالتنبوء والتصحيح (Predictor-Corrector). ونوجز استخدامه عند الخطوة n **كالآتي**

$$\begin{aligned} p &: y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right) \\ c &: y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + hf\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(i)}\right), \quad i = 0,1,\ldots,m-1 \\ & y_{n+1} = y_{n+1}^{(m)} \end{aligned} \qquad \textbf{(10.14)}$$

المثال (3): استخدم طريقة أويلر الضمنية مع طول الخطوة $h = 0.5$ **لإيجاد حل عددي على الفترة** $[1 \ , \ 2]$ **حيث** $y(1) = 1 \qquad y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2},$ **.**

الحل: بما أن $h = 0.5$ **فإنّ مجموعة التقطيع** $\{x_n\}$ **تكون**

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = 1.5, \qquad x_2 = 2$$

الآن لدينا $y_0 = y(1) = 1$ **،** $f(x,y) = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ **. قبل الشروع باستخدام أسلوب التنبوء والتصحيح علينا اختيار عدد التكرارات وليكن** $m = 1$**. عند الخطوة الأولى** $(n = 0)$ **نحسب**

$$\begin{aligned} y_1^{(0)} &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.5 f(1,1) = 0.5 \\ y_1^{(1)} &= y_0 + hf(x_1, y_1^{(0)}) = 1 + 0.5 f(1.5, 0.5) = 0.680 \end{aligned}$$

لنحصل على $y_1 = 0.680$**. نكرر العمليات السابقة للخطوة الثانية** $n = 1$

$$\begin{aligned} y_2^{(0)} &= y_1 + hf(x_1, y_1) = 0.680 + 0.5 f(1.5, 0.680) = 0.468 \\ y_2^{(1)} &= y_1 + hf(x_2, y_2^{(0)}) = 0.680 + 0.5 f(2, 0.468) = 0.540 \end{aligned}$$

لنحصل على $y_2 = 0.540$ **.**

بمقارنة النتائج التي حصلنا عليها مع قيمة الحل الفعلي $y(x)=\dfrac{1}{x}$ (يترك للطالب استخدام أحد الأساليب التي تعلمها سابقا لإيجاده) نرى أنّ قيمة الخطأ تساوي

x_n	y_n	$y(x_n)$	$\lvert e_n\rvert$
1.0	1.000	1.000	0.000
1.5	0.680	0.666	0.014
2.0	0.540	0.500	0.040

أما إذا اخترنا عدد التكرارات $m=2$ فسنحصل على

x_n	y_n	$y(x_n)$	$\lvert e_n\rvert$
1.0	1.000	1.000	0.000
1.5	0.787	0.666	0.121
2.0	0.818	0.500	0.318

نلاحظ مما سبق أنّ النتائج لم تتحسن عند زيادة عدد تكرارات التصحيح. لضمان تحسن النتائج علينا اختيار طول الخطوة h بحيث $hL<1$ و $\left|\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right| \le L$.

الاستقرارية المطلقة (Absolute stability) ومقارنة طريقتي أويلر

ترتبط الأستقرارية المطلقة لطريقة عددية بسلوك الحل العددي الناجم عن استخدامها و توافقه مع الحل الفعلي. وغالبا ما تستخدم مسألة الاختبار:

$$y' = \lambda y, \qquad y(0)=1 \tag{10.15}$$

للتحقق من ذلك. و لأجل دراسة الاستقرارية المطلقة لطريقتي أويلر الصريحة و الضمنية علينا مقارنة الحلول العددية التي نحصل عليها من تطبيق الطريقتين مع الحل الفعلي $y(x)=e^{\lambda x}$.

بتطبيق طريقة أويلر الصريحة نحصل على

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1+h\lambda)^{n+1} y_0$$

وبالتعويض عن قيمة y_0 بقيمة الشرط الابتدائي نحصل على الحل العددي

$$\{y_n\} = \{(1+h\lambda)^n\} \approx \{e^{x_n\lambda}\} \tag{10.16}$$

عندما $h\lambda>0$ تكون $\{y_n\}$ متزايدة وتتوافق سلوكياً مع الحل الفعلي $y(x)$. وعندما تكون $h\lambda<<0$ نرى أنّ الحل العددي $\{y_n\}$ يكون متذبذباً ومتباعداً عن الحل الفعلي الذي يؤول

إلى الصفر في هذه الحالة. وعليه في حالة $\lambda << 0$ علينا اختيار h صغيره بشكل كافٍ لضمان تحقيق المتراجحة $|1+h\lambda| < 1$. و بحل المتراجحة السابقة نحصل على

$$-2 < h\lambda < 0 \qquad \textbf{(10.17)}$$

تسمى المتراجحة (10.17) بفترة الاستقرارية المطلقة لطريقة أويلر الصريحة. ولكي نضمن توافق سلوك الحلين العددي و الفعلي في حالة $\lambda < 0$، علينا اختيار طول الخطوة h بحيث تكون قيمة $h\lambda$ ضمن فترة الاستقرارية المطلقة للطريقة.

أما طريقة أويلر الضمنية فعند تطبيقها على مسألة الاختبار (10.15) تعطينا

$$y_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_n = \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^{n+1} y_0$$

إي الحل العددي

$$\{y_n\} = \left\{\left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^n\right\} \approx \{e^{x_n \lambda}\} \qquad \textbf{(10.18)}$$

نلاحظ أنّ الحل العددي (10.18) يتوافق مع الحل الفعلي الذي يؤول للصفر عندما $x_n \to \infty$ في حالة $h\lambda << 0$ (بعيدة عن الصفر) مهما كانت قيمة h صغيرة أم كبيرة. يتضح من ذلك أنّ فترة الاستقرارية المطلقة لطريقة أويلرالضمنية هي

$$-\infty < h\lambda < 0 \qquad \textbf{(10.19)}$$

أما في حالة $\lambda > 0$، فيجب أن نختار طول الخطوة h صغيراً في جميع الأحوال للمحافظة على الدقة.

<u>نتيجة المقارنة بين طريقتي أويلر</u>

يتضح مما سبق تفوق طريقة أويلر الضمنية على نظيرتها طريقة أويلر الصريحة بالنسبة لمسالة الاختبار الخطية. ولكن عند تطبيق طريقة أويلر الضمنية على معادلة تفاضلية غير خطية يتعيّن علينا حل معادلة غير خطية في كل خطوة من خطوات الحل العددي. إن استخدام طريقة النقطة الصامدة لحل المعادلات غير الخطية تتطلب تحقيق الشرط $h\lambda < 1$ الذي يعتبر تحديداً لطول الخطوة مشابهاً للتحديد عند تطبيق طريقة أويلر الصريحة. ولتجاوز ذلك يمكن استخدام طريقة نيوتن لحل المعادلات غير الخطية بدلاً من طريقة النقطة الصامدة، و يمكن للطالب أن يجد تفاصيل طريقة نيوتن هذه في المصدر [14].

بشكل عام، لإيجاد فترة الاستقرارية المطلقة لطريقة عددية علينا تطبيقها على مسألة الأختبار (10.15) حيث $\lambda < 0$ واستنباط الشرط الذي يجعل الحل العددي متوافقا مع الحل الفعلي

$y=e^{\lambda x}$ الذي يؤول للصفرعندما $x\to\infty$. ومن هذا الشرط نستنتج فترة الاستقرارية المطلقة (α,β) للطريقة العددية حيث

$$\alpha<h\lambda<\beta$$

وبذلك علينا إختيار طول الخطوة h بحيث تنتمي $h\lambda$ للفترة (α,β). أما عند تطبيق الطريقة العددية على المسألة العامة $y'=f(x,y)\ ,\ a<x<b$ فعلينا تقدير قيمة λ كالآتي:

$$\lambda\cong\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

وكما موضح في المثال التالي:

المثال (4): ما هوطول الخطوة h المناسب لإيجاد حل عددي لمسألة القيمة الابتدائية $y'=-2xy\ ,\ y(0)=10$ على الفترة $[0,5]$ باستخدام طريقة أويلر الصريحة بحيث يتوافق سلوكه مع سلوك الحل الفعلي.

الحل: لكي يتوافق سلوك الحلين العددي مع الفعلي علينا اختيار h بحيث تنتمي $h\lambda$ لفترة الاستقرارية المطلقة للطريقة، أي $-2<h\lambda<0$ حيث

$$\lambda=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=-2x$$

و بما أن $0\le x\le 5$ فإنّ أقصى قيمة سالبة يمكن أن تصلها λ هي -10. وعليه يجب أن تتحقق المتراجحة $-2\le-10h<0$ ، أي علينا اخيار $0.2>h$.

10.3 طرائق خطية متعددة الخطوات - lmm (Linear multistep methods)

تعتبر طريقتي أويلر الصريحة والضمنية من الطرائق ذات الخطوة الواحدة، حيث أنّ حساب قيمة عددية تقريبية y_n للحل عند نقطة معينة مثل x_n يعتمد على القيمة العددية المحسوبة في الخطوة السابقة فقط (أي عند x_{n-1}). هناك طرائق عددية تعتمد في تخمين قيمة الحل عند x_n على عدد من القيم التقريبية المحسوبة في خطوات سابقة، أي عند $x_{n-1}\ ,\ x_{n-2}\ ,\ \dots\ ,x_{n-k}$. تسمى مثل هذه الطرائق الخطية بطرائق متعددة الخطوات.

التعريف (10.4): الصيغة العامة للطرائق الخطية ذات الخطوات k هي كالآتي :

$$\alpha_1 y_n+\alpha_1 y_{n+1}+\dots\dots+\alpha_k y_{n+k}=h\left(\beta_0 f_n+\beta_1 f_{n+1}+\dots\dots+\beta_k f_{n+k}\right)\qquad(10.20)$$

حيث $\{y_n\}$ تمثل حل عددي لمسألة القيمة الابتدائية $y'=f(x,y),\ \ y(a)=\eta$.

غالبا ما تكتب هذه الطرائق بصيغة أخرى بحيث $\alpha_k = 1$ كما يأتي:

$$y_{n+k} = -\alpha_0 y_n - \alpha_1 y_{n+1} - ......- \alpha_{n+k-1} y_{n+k-1}$$
$$+ h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_n + ...+ \beta_k f_{n+k})$$

من العلاقة السابقة يتضح اعتماد القيمة التقريبية y_{n+k} التي نروم تخمينها على القيم التقريبية $y_n, y_{n+1},....., y_{n+k-1}$ المحسوبة أو المخمنة عند k من النقاط

$$x_n + ih, \quad i = 0,\ 1,...,\ k-1$$

على التوالي. وفيما يأتي بعض الطرائق الشائعة ذات الخطوات المتعددة :

1- قاعدة النقطة الوسطية : (Midpoint rule)

$$y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1} \qquad \textbf{(10.21)}$$

بالمقارنة مع الصيغة العامة للطرائق متعددة الخطوات نجد أن

$$k = 2, \quad \alpha_0 = -1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 0$$

أي أن الطريقة صريحة وذات خطوتين.

2- قاعدة شبه المنحرف (Trapezoidal rule)

$$y_{n+1} = y_n + h\left\{\frac{1}{2} f_n + \frac{1}{2} f_{n+1}\right\} \qquad \textbf{(10.22)}$$

أن هذه الطريقة ضمنية و ذات خطوة واحدة، حيث

$$k = 1, \quad \alpha_0 = -1, \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = \beta_1 = \frac{1}{2}$$

3- قاعدة سمبسون :(Simpson’s rule)

$$y_{n+2} = y_n + h\left\{\frac{1}{3} f_n + \frac{4}{3} f_{n+1} + \frac{1}{3} f_{n+2}\right\} \qquad \textbf{(10.23)}$$

وهي ضمنية وذات خطوتين. بصورة عامة إذا كانت β_k تساوي صفراً فإنّ الطريقة ذات الخطوات المتعددة تكون صريحة ويمكن حساب قيمة y_{n+k} مباشرة بدلالة القيم التقريبية

$$y_n, y_{n+1},....., y_{n+k-1}, \qquad f_n, f_{n+1},......, f_{n+k}$$

وفي هذه الحالة وبعد الحصول على قيمة y_{n+k} يستحسن حساب قيمة f_{n+k} قبل الانتقال للخطوة اللاحقة (أي لحساب قيمة y_{n+k+1}).

أما إذا كانت $\beta_k \neq 0$ فإنّ الطريقة تكون ضمنية وعلينا حل معادلة غير خطية لإيجاد y_{n+k} عندما تكون f غير خطية. و في حالة استخدام طريقة النقطة الصامدة التكرارية (Fixed point iteration) تكون الطريقة:

$$y_{n+k}^{(i+1)} = \sum_{j=0}^{n+k-1}\left(-\alpha_j y_{n+j} + h\beta_j f_{n+j}\right) + \beta_k f\left(x_{n+k}, y_{n+k}^{(i)}\right), \quad i = 0,1,\ldots. \qquad \textbf{(10.24)}$$

علينا إيجاد تقريب للقيمة الابتدائية $y_{n+k}^{(0)}$ وغالبا ما تستخدم طريقة صريحة لذلك كما فعلنا مع طريقة أويلر الضمنية في البند السابق.

<u>القيم الابتدائية للطرائق متعددة الخطوات :</u> (Initial values for lmm)

نلاحظ من الصيغة العامة للطرائق متعددة الخطوات أن تنفيذ طريقة ذات k خطوة يتطلب معرفة القيم $y_o, y_1, \ldots, y_{k-1}$ لبدء التنفيذ. عادة ما تستخدم طريقة تايلور لإيجاد قيم تقريبية لها.

لتكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية $y' = f(x,y), \quad y(a) = \eta$ والتقطيع

$$x_n = a + ih, \quad i = 0,1,\ldots,N, \quad Nh = b - a$$

بما أن $y_j = y(x_j) = y(a + jh), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1$

فإنّ طريقة تايلور تعطينا

$$y_j = y(a) + jhy'(a) + \frac{(jh)^2}{2!}y''(a) + \ldots \qquad \textbf{(10.25)}$$

المثال (1): إستخدم قاعدة النقطة الوسطية (المعادلة 10.21) بخطوة طولها $h = 0.1$ لإيجاد حل عددي لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1, \quad 0 \le x \le 0.5$$

ثم جد الحل الفعلي و قارنه مع الحل العددي الذي حصلت عليه.

الحل: لدينا المعلومات الآتية:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad h = 0.1, \quad f(x,y) = x + y$$

بما أن الطريقة ذات خطوتين فنحتاج إلى القيمتين y_0 , y_1 لتوليد الحل العددي $\{y_n\}$ منها بوساطة

$$y_{n+2} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

إن قيمة y_0 نحصل عليها عادة من القيمة الابتدائية للمسألة، أما y_1 فيمكن الحصول عليها باستخدام سلسلة تايلور (المعادلة 10.25) كالاتي:

$$y_1 \cong y(0) + hy'(0) + \frac{h^2}{2!} y''(0) = 1 + h + h^2 = 1.11$$

الان نستطيع توليد بقية القيم للحل العددي

$$y_2 = y_0 + 2hf(x_1, y_1) = 1 + 0.2(x_1 + y_1) = 1.242$$

$$y_3 = y_1 + 2hf(x_2, y_2) = 1.11 + 0.2(0.2 + 1.242) = 1.3984$$

$$y_4 = y_2 + 2hf(x_3, y_3) = 1.242 + 0.2(0.3 + 1.3984) = 1.5817$$

$$y_5 = y_3 + 2hf(x_4, y_4) = 1.3984 + 0.2(0.4 + 1.5817) = 1.7947$$

الجدول الآتي يحوي مقارنة الحل العددي مع القيم المرادفة للحل الفعلي:

$$y = -x - 1 + 2e^x$$

الذي يستطيع الطالب إيجاده لكون المعادلة التفاضلية خطية من الرتبة الأولى:

n	:	0	1	2	3	4	5
x_n	:	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_n	:	1.000	1.110	1.242	1.398	1.582	1.795
$y(x_n)$	:	1.000	1.110	1.243	1.400	1.584	1.797

رتب الطرائق الخطية متعددة الخطوات : (Order of lmm)

سنكتفي في هذا البند بإعطاء الشروط اللازمة للرتبة p ، التي يمكن الحصول عليها بمقارنة الحل العددي المولد بوساطة الطريقة العددية ومفكوك تايلور للحل الفعلي. لمزيد من التفاصيل يمكن للطالب الرجوع الى المصدر [14] .

التعريف (10.5) : يقال للطريقة العددية المتعددة الخطوات (10.20) و هي

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j} - h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j} = 0$$

أنّها ذات رتبة p إذا تحقق $C_q = 0 \;,\; q = 0, 1, \dots, p$ و $C_{p+1} \neq 0$ حيث إن

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k$$
$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_k)$$
$$C_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \dots + k^2\alpha_k) - (\beta_0 + 2\beta_1 + \dots + k\beta_k)$$
$$\vdots$$
$$C_q = \frac{1}{q!}(\alpha_1 + 2^q\alpha_2 + \dots + k^q\alpha_k) - \frac{1}{(q-1)!}(\beta_1 + 2^{q-1}\beta_2 + \dots + k^{q-1}\beta_k)$$

ثابت الخطأ: يسمى C_{p+1} بثابت الخطأ للطريقة العددية ذات الخطوات المتعددة والرتبة p (المعادلة 10.20). و سيكون لهذا الثابت دور مهم عند تخمين الخطأ الموضعي للحل العددي.

إن الشروط في التعريف السابق تضمن تحقيق الخطأ الموضعي المبتور للمتراجحة

$$\left| y^*_{n+k} - y(x_{n+k}) \right| < Kh^{p+1}$$

حيث y^*_{n+k} تمثل القيمة التقريبية التي نحصل عليها لخطوة واحدة بفرض جميع القيم السابقة التي تحتاجها الطريقة مضبوطة، كما هو الحال بالنسبة لطريقتي أويلر.

المثـال (2): جد رتبة وثابت الخطأ لقاعدة شبه المنحرف

$$y_{n+1} = y_n + h\left\{\frac{1}{2}f_n + \frac{1}{2}f_{n+1}\right\}$$

الحل: باستخدام التعريف (10.5) نحصل على

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 = 0$$
$$C_1 = \alpha_1 - \beta_0 - \beta_1 = 0$$
$$C_2 = \frac{1}{2}\alpha_1 - \beta_1 = 0$$
$$C_3 = \frac{1}{6}\alpha_1 - \frac{1}{2}\beta_1 = -\frac{1}{12}$$

عليه تكون رتبة الطريقة $p=2$ وثابت الخطــأ $C_{p+1}=\frac{-1}{12}$

المثال (3): جد رتبة وثابت الخطأ لقاعدة النقطة الوسطية $y_{n+1}=y_n+2hf_{n+1}$

الحل: نحدد معلمات الطريقة

$$k=2,\quad \alpha_0=-1,\quad \alpha_1=0,\quad \alpha_2=1,\quad \beta_0=0\quad \beta_1=2\quad \beta_2=0$$

ثم نتحقق من شروط الرتبة

$$C_0=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=0$$
$$C_1=\alpha_1+2\alpha_2-(\beta_0+\beta_1+\beta_2)=2-(2)=0$$
$$C_2=\frac{1}{2}(\alpha_1-2^2\alpha_2)-(\beta_0+2\beta_2)=\frac{1}{2}(0+4)-(2+0)=0$$
$$C_3=\frac{1}{3!}(\alpha_1-2^3\alpha_2)-\frac{1}{2!}(\beta_1+2^2\beta_2)=\frac{1}{6}(8)-\frac{1}{2}(2)=\frac{1}{3}$$

إذن رتبة الطريقة هي $p=2$ **و ثابت الخطأ هو** $C_{p+1}=\frac{1}{3}$.

<u>الاستقرارية المطلقة للطرائق متعددة الخطوات</u> : (Absolute stability for lmm)

كما ذكرنا في نهاية البند السابق، لإيجاد فترة الاستقرارية المطلقة للطريقة العددية علينا تطبيقها على مسألة الاختبار

$$y'=\lambda y,\qquad y(0)=1,\quad \lambda<0$$

و ملاحظة الشروط التي تجعل سلوك الحلين العددي و الفعلي متوافقين. فيما يأتي ندون فترات الاستقرارية المطلقة للطرائق المذكورة في هذا البند من دون ذكر تفاصيل إيجادها مع رتبها وثابت خطأها و عدد خطواتها.

الطريقة العددية	فترة الاستقرارية المطلقة $(\alpha,0)$	عددالخطوات k	ثابت الخطأ C_{p+1}	الرتبة p
أويلرالصريحة	$(-2,0)$	1	$1/2$	1
أويلر الضمنية	$(-\infty,0)$	1	$-1/2$	1

النقطة الوسطية	ϕ	2	1/3	2
شبه المنحرف	$(-\infty,0)$	2	−1/12	2

طرائق آدمز العددية : (Adams numerical methods)

تعد طرائق آدمز لحل المعادلات التفاضلية من الطرائق الشائعة الاستخدام لسهولة برمجتها على الحاسب ووجود عدد منها ذات رتب مختلفة. الصيغة العامة لطرائق آدمز ذات k من الخطوات هي كالآتي:

$$y_{n+1} = y_{n+k-1} + h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j} \qquad \textbf{(10.26)}$$

عندما $\beta_k = 0$ تكون الطرائق صريحة وتسمى آدمز- باشفورث (Adams-Bashforth). أما في حالة $\beta_k \neq 0$ تكون الطرائق ضمنية وتسمى آدمز- مولتــن (Adams-Moulton).

فيما يأتي جدولان بمعاملات بعض طرائق آدمز من كلا النوعين مع عدد الخطوات والرتبة و ثابت الخطأ وفترة الاستقرارية $(\alpha,0)$ لكل منها. بمقارنة بسيطة بين الجدولين نستدل أن لنفس عدد الخطوات تكون طرائق ادمز- مولتن ذات رتب أعلى من طرائق ادمز- باشفورث ولها فترات استقرارية أوسع، كما أن فترات الاستقرارية تصغر بزيادة الرتبة.

1. طرائق آدمز – باشفورث (الصريحة)

k	p	C_{p+1}	α	β_0	β_1	β_2	β_3
1	1	$1/2$	-2	1			
2	2	$5/12$	-1	$-1/2$	$3/2$		
3	3	$3/8$	$-6/11$	$5/12$	$-16/12$	$23/12$	
4	4	$251/720$	$-3/10$	$-9/24$	$37/24$	$-59/24$	$55/24$

2. طرائق آدمز – مولتن (الضمنية)

k	p	C_{p+1}	α	β_0	β_1	β_2	β_3
1	2	$-1/11$	$-\infty$	$1/2$	$1/2$		
2	3	$-1/24$	-6	$-1/12$	$8/12$	$5/12$	
3	4	$-19/720$	-3	$1/24$	$-5/24$	$19/24$	$9/24$

المثال (4): استخدم طريقة ادمز باشفورث ذات الخطوتين بطول للخطوة $h=\frac{1}{2}$ لإيجاد حل عددي لمسألة القيمة الابتدائية $y(0)=1$, $y'=-xy^4-\frac{2y}{x+1}$ على الفترة $[0,2]$، ثم ناقش اختيار طول الخطوة وعلاقته بالاستقرارية المطلقة للطريقة.

الحل: **إن طريقة آدمز- باشفورث ذات الخطوتين**

$$y_{n+2}=y_{n+1}+\frac{h}{2}\{3f(x_{n+1},y_{n+1})-f(x_n,y_n)\}$$

تحتاج إلى قيمتين ابتدائيتين y_0 و y_1 لحساب y_2 ويمكن أخذ قيمة y_0 باعتبارها القيمة الابتدائية للمعادلة التفاضلية $y(0)$ والتي تساوي 1، أما قيمة y_1 فيمكن تخمينها بطريقة تايلور كالآتي:

$$y_1=y(x_1)=y(a+h)=y(a)+hy'(a)+\frac{h^2}{2}y''(a)$$

حيث $a=0, \quad y(a)=1, \quad y'(a)=f(a,y(a))=-2$

و $y''(a)=-4xy^3y'-y^4-\frac{(x+1)2yy'-2y}{(x+1)^2}=-1-\frac{-6}{1}=5$

بذلك نحصل على العلاقة $y_1=1-2h+\frac{5}{2}h^2$ **، وبالتعويض عن قيمة h التي تساوي $\frac{1}{2}$ نحصل على التخمين** $y_1=1-1+\frac{5}{8}=0.625$.

الآن لحساب القيم التقريبية الأخرى للحل نكون الجدول الآتي :

n	x_n	y_n	f_n	$h(3f_{n+1}-f_n)/2$
0	0.0	1.0000	– 2.0000	– 0.1822
1	0.5	0.6250	– 0.9096	– 0.1335
2	1.0	0.4428	– 0.4812	– 0.0755
3	1.5	0.3093	– 0.2611	– 0.0561
4	2.0	0.2337		

بما أن فترة الاستقرارية المطلقة لطريقة آدمز- باشفورث ذات الخطوتين هي $(-1,0)$. فللإجابة عن مدى انسجام اختيار طول الخطوة $h=1/2$ مع شرط الاستقرارية المطلقة علينا التحقق من المتراجحة $-1<h\lambda<0$ ، حيث $\lambda=\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$. سنحاول أولا إيجاد قيد للمشتقة الجزئية $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ خلال فترة الحل. بما أن $f(x,y)=-xy^4-\dfrac{2y}{x+1}$ ، فإن

$$\lambda=\frac{\partial f}{\partial y}=-4xy^3-\frac{2}{x+1}$$

من العلاقة أعلاه يتبين عدم استطاعتنا إيجاد قيد للمشتقة الجزئية $\lambda=\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ما لم نجد قيداً لدالة الحل $y(x)$ على فترة الحل أولا. إذا كانت $y(x_0)=0$ لقيمة حقيقية x_0 فإنّ جميع المشتقات ستؤول قيمها إلى الصفر عند نفس القيمة، وبذلك تكون دالة الحل هي الدالة الصفرية حسب مفكوك تايلور عند x_0. وهذا يتناقض مع القيمة الابتدائية $y(0)=1$ عليه فإنّ $y(x)>0$ ، لكل قيم $0\le x$ ومن ذلك يتبين أنّ y' تكون سالبة دائما. أي أن $0<y(x)\le 1$ للقيم $0<x\le 1$. و عليه تحقق λ المتباينه:

$$0\ge\lambda\ge-4x-\frac{2}{x+1}\ge-9,\qquad 0\le x\le 2$$

ولكي تقع قيمة $h\lambda$ داخل فترة الاستقرارية المطلقة $(-1,0)$ يجب اختيار h بحيـــث $0>h\lambda>-1$ ، أي إن طول الخطوة يجب إن يحقق $h<\dfrac{1}{9}$. من هذا يتبين أنّ اختيار $h=1/2$ يتعارض مع الاستقرارية المطلقة.

إن طرائق آدمز- باشفورث الصريحة قلما تستخدم في التطبيقات وحدها. والأسلوب الشائع هو استخدام زوج من طرائق آدمز على شكل تنبوء وتصحيح بحيث تكون الأولى من نوع ادمز- باشفورث الصريحة والثانية من نوع آدمز - مولتن الضمنية على أن تكون الطريقتان من الرتبة نفسها.

على سبيل المثال يمكن استخدام طريقة آدمز- باشفورث ذات الخطوتين مع طريقة آدمز- مولتن ذات الخطوة الواحدة، وهي طريقة شبه المنحرف نفسها، و كلاهما من الرتبة الثانية كتنبؤ وتصحيح كما يأتي :

$$p : y_{n+2}^{(0)} = y_{n+1} + \frac{h}{2}\{3f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)\}$$
$$c : y_{n+2}^{(i+1)} = y_{n+1} + \frac{h}{2}\{f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_{n+2}^{(i)})\}, \quad i = 0,1,\dots,m-1$$
$$y_{n+2} = y_{n+2}^{(m)}$$

تحتاج الطريقة الصريحة بشكل عام إلى حساب قيمة واحدة للدالة f وذلك لتوفير قيمة التنبوء $y_{n+2}^{(i)}$ أما الطريقة الضمنية فيكرر استخدامها m من المرات وفي كل مرة نحتاج إلى حساب قيمة للدالة f لنحصل على تصحيح للقيمة السابقة $y_{n+2}^{(i)}$.

اما القيمتان الابتدائيتان y_0 , y_1 اللتان نحتاجهما في بداية التطبيق فيمكن توفيرهما من الشرط الابتدائي للمسألة وطريقة تايلور كما بينا ذلك سابقا.

إن اكثر الطرائق شيوعا في الاستخدام هي طريقتا آدمز- باشفورث وآدمز- مولتن من الرتبة الرابعة:

$$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}\{-9f_n + 37f_{n+1} - 59f_{n+2} + 55f_{n+3}\}$$
$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{24}\{f_n - 5f_{n+1} + 19f_{n+2} + 9f_{n+3}\}$$

تخمين الخطا لطرائق آدمز للسيطرة على طول الخطوة

(Error estimates for step-size control)

هناك عدد من الأساليب يمكن بوساطتها السيطرة على طول الخطوة المستخدم في طرائق آدمز لحل مسألة القيمة الابتدائية $y(a) = \eta \quad y' = f(x,y),$ ، ومن أشهر الأساليب هذه تخمين الخطأ الموضعي المبتور. ومع أن هذا التخمين لا يعطي مؤشرا دقيقا إلى الخطأ

الإجمالي لكنه مفيد للسيطرة على طول الخطوة. بصورة خاصة يتوفر تخمين بسيط لطرائق التنبوء والتصحيح عندما تكون كل من طريقتي التنبوء والتصحيح لهما الرتبة p نفسها. بفرض أن طريقة ادمز- باشفورث ذات k من الخطوات يكون لدينا الخطأ المحلي المبتور.

$$y(x_{n+k}) - y_{n+k}^{(0)} = C_{p+1}^{*} h^{p+1} y^{p+1}(x_n) + O(h^{(p+2)}) \qquad \textbf{(10.27)}$$

حيث $O(h)$ تعني أنّ $\frac{O(h)}{h}$ تؤول الى عدد ثابت عندما $h \to 0$.

أما طريقة آدمز- مولتن فتعطي الخطأ المحلي المبتور

$$y(x_{n+k}) - y_{n+k}^{(m)} = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{(p+2)}) \qquad \textbf{(10.28)}$$

من المعادلتين السابقتين نحصل على تخمين للحد الأول (الأساسي) في الخطأ المبتور

$$C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n) = \frac{C_{p+1}}{C_{p+1}^{*} - C_{p+1}} (y_{n+k}^{(m)} - y_{n+k}^{(0)}) \qquad \textbf{(10.29)}$$

يستفاد من التخمين السابق للخطأ المحلي المبتور في السيطرة على طول الخطوة عند وجود تقنية لحساب القيم الابتدائية برتبة مساوية لرتبة الطريقة المستخدمة لكل خطوة يتم فيها تغيير طول الخطوة. إنّ استخدام طريقة تايلور لتوليد القيم الابتدائية قد يفشل في حالة عدم وجود أحد المشتقات اللازمة.

المثال (5): استخدم طريقتي أويلر الصريحة وأويلر الضمنية كتنبوء وتصحيح لإيجاد حل عددي على الفترة $[0,2]$ ، مستخدما خطوة طولها $h = 0.5$ ، لمسألة القيمة الابتدائية :

$y(0) = \frac{1}{2}$, $y' = -xy^2$. ثم استخدم طريقة مايلن (Milne) لتقدير الخطأ في كل خطوة.

وقارن النتائج مع الحل الفعلي $y(x) = \frac{2}{(x^2+4)}$.

الحل: لدينا المعلومات $x_0 = 0,\ y_0 = 0.5,\ h = 0.5,\ f(x,y) = -xy^2$

وإذا افترضنا التكرار $m = 0$ لطريقة التصحيح فسيكون لدينا

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})$$
$$E_{n+1} = \frac{C_{p+1}}{C_{p+1}^{*} - C_{p+1}} (y_{n+1} - y_{n+1}^{(0)}) = -\frac{1}{2}(y_{n+1} - y_{n+1}^{(0)})$$

نعوض $n=0$ فنحصل على

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0.5$$
$$y_1 = y_0 + hf(x_1, y_1^{(0)}) = 0.5 + 0.5(-0.5)(0.5)^2 = 0.4375$$
$$E_1 = \frac{1}{2}(y_1 - y_1^{(0)}) = \frac{1}{2}(0.4375 - .5) = -0.031$$

أما بقية قيم الحل العددي فيستطيع الطالب أن يجدها بالأسلوب نفسه وتدقيقها مع القيم في الجدول الآتي، حيث $e_n = |y(x_n) - y_n|$ تمثل الخطأ الفعلي :

n	x_n	y_n	E_n	e_n
0	0.0	0.5000	0.0000	0.0000
1	0.5	0.4375	0.0313	0.0384
2	1.0	0.3616	0.0140	0.0384
3	1.5	0.2958	0.0002	0.0242
4	2.0	0.2428	0.0063	0.0072

هناك نوع أخر من الطرائق التي تكون ذات خطوة واحدة ولكن ذات رتب عالية يمكن استخدامها لتجاوز هذه الصعوبات وهي طرائق رونكه - كوتا.

10.4 طرائق رونكه - كوتا : (Runge - Kutta methods)

تعد كل من طريقتي أويلر الصريحة والضمنية من الطرائق الخطية ذات الخطوة الواحدة والرتبة الأولى التي تحتاج في كل خطوة إلى حساب قيمة جديدة واحدة للدالة f المعرفة في مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(x, y), \qquad y(a) = \eta$$

وكما بينا سابقا، للحصول على طرائق خطية متعددة ذات رتب عالية علينا التضحية بوحدانية الخطوة، اي اعتماد القيمة التقريبية المطلوب حسابها على قيم تقريبية لعدد من الخطوات السابقة، ولكن من ناحية أخرى يتعين الابقاء على حاجة الطريقة لحساب قيمة الدالة مرة واحدة في كل خطوة. إنّ طرائق رونكه - كوتا تحافظ على الخاصية الأولى، أي انها ذات خطوة واحدة، ولكن تحتاج الى حساب مزيد من قيم الدالة للحصول على رتب أعلى. بذلك يمكن

استخدام هذه الطرائق لتوليد القيم الابتدائية التي تحتاجها طرائق متعددة الخطوات ومن ميزاتها إمكانية تغيير طول الخطوة عند أية مرحلة من مراحل الحل.
فيما يأتي بعض الطرائق مكتوبة بصيغة رونكه-كوتا التي سبق أن عدت من طرائق متعددة الخطوات ذات الخطوة الواحدة:

1- طريقة أويلر الصريحة

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
y_{n+1} &= y_n + hk_1
\end{aligned}
\qquad \textbf{(10.30)}
$$

وهي صريحة ذات رتبة $p=1$ وتحتاج إلى احتساب قيمة واحدة للدالة في كل خطوة.

2- طريقة أويلر الضمنيــة

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_{n+1}, y_n + hk_1) \\
y_{n+1} &= y_n + hk_1
\end{aligned}
\qquad \textbf{(10.31)}
$$

وهي ضمنية ذات رتبـة $p=1$ و مرحلة واحدة.

3- طريقة شبه المنحــرف

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_{n+1}, y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)) \qquad \textbf{(10.32)} \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)
\end{aligned}
$$

وهي ضمنية ذات مرحلتين $s=2$ و رتبــة $p=2$.

بشكل عام تكتب طريقة رونكه - كوتا ذات المراحل s بالصيغة الآتية:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n + c_1 h, y_n + h(b_{11}k_1 + b_{12}k_2 + \dots + b_{1s}k_s) \\
k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h(b_{21}k_1 + b_{22}k_2 + \dots + b_{2s}k_s) \\
&\vdots \\
k_s &= f(x_n + c_s h, y_n + h(b_{s1}k_1 + b_{s2}k_2 + \dots + b_{ss}k_s) \\
\\
y_{n+1} &= y_n + h(\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \dots + \beta_s k_s)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(10.33)}
$$

تكون طريقة رونكه - كوتا ذات المراحل s صريحة عندما تكون قيم المعاملات

$$b_{ij} = 0 \qquad \forall \qquad j \geq i$$

في هذه الحالة تحسب قيم k_1 , k_2 , ... , k_s للمراحل المتعددة بصورة مباشرة وبشكل متعاقب بدلالة قيم الدالة f وتكتب كما يأتي:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h b_{21}k_1) \\
k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(b_{31}k_1 + b_{32}k_2)) \\
&\vdots \\
k_s &= f(x_n + c_2 h, y_n + h(b_{s1}k_1 + \dots + b_{s,s-1}k_{s-1})) \\
y_{n+1} &= y_n + h(\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \dots + \beta_s k_s)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(10.34)}
$$

<u>رتب طرائق رونكه - كوتا</u> (Order of Runge – Kutta methods)

تعرف رتبة طريقة عددية من نوع رونكه - كوتا بشكل مشابه للتعريف المستخدم في البنود السابقة وذلك بدلالة الخطأ المحلي المبتور. أي أنها تكون ذات رتبة p إذا تحقق

$$\left| y(x_{n+1}) - y^*_{n+1} \right| \leq K h^{p+1}$$

حيث y^*_{n+1} القيمة العددية التي سنحصل عليها بفرض عدم وجود خطأ في القيمة التقريبية عند بداية الخطوة، أي $y_n = y(x_n)$. وتحقق هذه المتراجحة عادة بمقارنة حدود متسلسلة تايلور للحلين الفعلي $y(x_{n+1})$ والعددي y^*_{n+1} . إن اشتقاق طرائق رونكه - كوتا و خاصة ذات الرتب العالية منها معقد بعض الشيء ولذا سوف نكتفي بذكرالشائعة منها.

4. طريقة رونكه - كوتا الصريحة ذات المراحل $s=2$ والرتبة $p=2$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(10.35)}
$$

5. طريقة رونكه - كوتا الصريحة ذات المراحل $s=4$ والرتبة $p=4$ وهي الأكثر شيوعا :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\
k_3 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(10.36)}
$$

6. طريقة رونكه - كوتا الضمنية ذات المرحلتين والرتبة $p=3$:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1) \\
k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4}(3k_1 + k_2)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(10.37)}
$$

المثـال (1): استخدم الطريقة 4 لرونكه - كوتا الصريحة (المعادلات 10.35) مع خطوة طولها $h=0.5$ لإيجاد حل عددي لمسألة القيمة الابتدائية $y' = \frac{2y}{x+1},\ \ y(0)=1$ على الفترة $[0,2]$، ثم قارن النتائج مع الحل الفعلي.

الحل: لدينا المعلومات $f(x,y)=\dfrac{2y}{x+1}$, $h=0.5$, $y_0=1$, $x_0=0$, **وعلينا حساب**

التقريبات $\{y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3\ ,\ y_4\}$ **حيث** $x_i=0+ih$, $y_i\cong y(x_i)$ **.**

لحساب قيمة y_1 **نعوض** $n=0$ **في المعادلات**

$$k_1=f(x_n,y_n)\ ,\ k_2=f(x_n+h,y_n+hk_1)\ ,\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(k_1+k_2)$$

لنحصل على

$$k_1=f(0,1)=2\ ,\ k_2=f(0.5,2)=2.666\ ,$$

$$y_1=1+\frac{0.5}{2}(2+2.666)=2.166$$

الجدول الآتى يتضمن بقية الحسابات مع القيم المرادفة للحل الفعلي $y=(x+1)^2$ **الذي يمكن إيجاده بطريقة فصل المتغيرات:**

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	$\lvert y_n-y(x_n)\rvert$
0	0.0	1.000	1.000	0.000
1	0.5	2.166	2.250	0.083
2	1.0	3.792	4.000	0.208
3	1.5	5.877	6.250	0.373
4	2.0	8.424	9.000	0.576

يتضح من الجدول أعلاه تراكم الأخطاء في القيم العددية بزيادة x **و ذلك يرجع لعدم استخدامنا لطول مناسب للخطوة. يمكن للطالب أن يجد حلا عدديا آخراً باستخدام خطوة طولها** $h=0.2$ **فسيرى أنّ الخطأ في قيمة الحل العددي عند** $x=2$ **يؤول الى** 0.128 **بدلا من** 0.576**.**

المثال(2): استخدم طريقة رانكه - كوتا 5 ذات الرتبة الرابعة لتخمين $y(2)$ **للمسألة في المثال (1) مستعملا طول الخطوة** $h=0.5$ **. قارن التخمين مع النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام طريقة رونكه - كوتا الصريحة من الرتبة الثانية.**

الحل: : لدينا المعلومات $f(x,y)=\dfrac{2y}{x+1}$, $h=0.5$, $y_0=1$, $x_0=0$

الجدول الآتى يتضمن الحسابات اللازمة حيث:

$$k_1 = f(x_n, y_n) \qquad k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \qquad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

و بالتعويض عن قيمة h والتبسيط نحصل على:

$$k_1 = \frac{2y_n}{x_n + 1} \qquad k_2 = \frac{2y_n + \frac{1}{2}k_1}{x_n + \frac{5}{4}}$$

$$k_3 = \frac{2y_n + \frac{1}{2}k_2}{x_n + \frac{5}{4}} \qquad k_4 = \frac{2y_n + k_3}{x_n + \frac{3}{2}}$$

بتعويض $n = 0$ في المعادلات أعلاه و استخدام المعلومات المعطاة في المسألة نحصل على:

$$k_1 = \frac{2y_0}{x_0 + 1} = 2 \qquad k_2 = \frac{2y_0 + \frac{1}{2}k_1}{x_0 + \frac{5}{4}} = 2.4$$

$$k_3 = \frac{2y_0 + \frac{1}{2}k_2}{x_0 + \frac{5}{4}} = 2.56 \qquad k_4 = \frac{2y_0 + k_3}{x_0 + \frac{3}{2}} = 3.04$$

ومنها نحصل على قيمة

$$y_1 = y_0 + \frac{0.5}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.246$$

اما بقية قيم الحل العددي فتجدها في الجدول الآتي:

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	$\lvert y_n - y(x_n)\rvert$
0	0.0	1.000	1.000	0.000
1	0.5	2.246	2.250	0.003
2	1.0	3.999	4.000	0.007
3	1.5	6.238	6.250	0.012
4	2.0	8.983	9.000	0.017

المثال (3): استخدم الطريقة 6 لرونكه - كوتا الضمنية (المعادلات 10.37) لإيجاد حل عددي لمسألة القيمة الابتدائية $y(0)=1$, $y'=\dfrac{-y}{x+1}$ مع خطوة طولها $h=0.5$ على الفترة $[0,2]$، ثم قارن النتائج مع الحل الفعلي. كيف تطبق هذه الطريقة على معادلة تفاضلية غير خطية مثل المسألة: $y(0)=1$, $y'=-xy^2$.

الحل: لتخمين $y_{n+1}\cong y(x_{n+1})$ بدلالة $y_n \cong y(x_n)$ علينا حساب قيم k_1 و k_2 أولا حيــث

$$k_1 = f\left(x_n+\frac{h}{3}, y_n+\frac{h}{3}k_1\right) = -\frac{y_n+\frac{h}{3}k_1}{x_n+\frac{h}{3}+1} = -\frac{y_n+\frac{1}{6}k_1}{x_n+\frac{7}{6}}$$

وبالتبسيط نحصل على

$$k_1 = \frac{-y_n}{x_n+\frac{4}{3}}$$

أما قيمة k_2 فنحصل عليها من

$$k_2 = f(x_n+h, y_n+hk_1) = -\frac{y_n+\frac{1}{2}k_1}{x_n+\frac{3}{2}}$$

بعد ذلك يمكن احتساب القيمة التقريبية للحل عند x_{n+1}، و هي:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{8}(3k_1+k_2)$$

الجدول الآتي يحتوي على القيم التقريبية التي تم حسابها لحل المسألة مع القيم الفعلية المرادفة لها. باستطاعة الطالب إيجاد الحل الفعلي للمسألة باستخدام طريقة فصل المتغيرات:

x_n	y_n	k_1	k_2	$(3k_1+k_2)/8$	$y(x_n)$
0.0	1.000	-0.416	1.000	-0.334	1.000
0.5	0.666	-0.363	-0.242	-0.166	0.666
1.0	0.500	-2.142	$-.157$	-0.100	0.500
1.5	0.400	-0.141	-0.110	-0.067	0.400
2.0	0.333				0.333

للمسائل غير الخطية يمكن استخدام طريقة النقطة الصامدة التكرارية لإيجاد الحلول العددية، وهي:

$$k_1^{(i+1)} = f(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3} k_1^{(i)}),\ \ i = 0,1,\dots,m$$

حيـــث $$k_1^{(0)} = f(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3} f(x_n, y_n))$$

وعليه بالنسبة للمسألـة $y' = -xy^2,\ \ y(0) = 1$ **لدينا** $f(x,y) = -xy^2$ $h = 0.5,$ **. نفرض قيمة معينة لعدد تكرار التصحيح ، لتكن** $m = 1$ **، ثم نتبع خطوات الخوارزمية الآتية :**

1. **قراءة المعلومات** $y_0 = 1,\ \ a = 0,\ \ b = 2,\ \ h = 0.5,\ \ n = 0$
2. **وضع** $x_0 = a$
3. **حساب** k_1
4. **تصحيح** k_1 **لمرتين :** $i = 0,\ 1$, $k_1 = -(x_n + \frac{1}{6})(y_n - \frac{1}{6}k_1)^2$
5. **حساب** k_2 **:** $k_2 = -(x_n + h)(y_n + hk_1)^2$
6. **حساب** y_{n+1} **:** $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{8}(3k_1 + k_2)$
7. **اختبار** $x_n \geq b$ **فإذا كان الجواب نعم نتوقف وبخلافه يوضع** $n = n+1,\ \ x_n = x_{n-1} + h$ **ثم الانتقال إلى الخطوة (3).**

يترك للطالب تنفيذ الخوارزمية ولو لخطوة واحدة باستخدام الحاسبة اليدوية أو برمجتها على الحاسبة الألكترونية و إيجاد الحل العددي على الفترة $[0,2]$ ، وفي هذه الحالة يستطيع الطالب أن يغير طول الخطوة للحصول على حل عددي أفضل.

الاستقرارية المطلقة لطرائق رونكه - كوتا: (Absolute stability of R-K methods)

بشكل مشابه للطرائق ذات الخطوات المتعددة يمكن الحصول على فترات الاستقرارية المطلقة لطرائق رونكه- كوتا وذلك بتطبيقها مع طول ثابت للخطوة h على مسألة الاختبار:

$$y' = \lambda y, \qquad y(0) = 1, \qquad \lambda < 0$$

لنحصل على متتابعة من التقريبات $\{y_n\}$ لقيم الحل الفعلي $\{y(x_n) = e^{\lambda x_n}\}$، حيث $x_n = nh$. يقال للطريقة أنّها ذات استقرارية مطلقة للقيمة $h\lambda$ إذا كانت المتتابعة $\{y_n\}$ موجودة وتتقارب إلى الصفر، أي أن سلوك الحلين العددي و الفعلي متوافقان. ويطلق على $(\alpha,0)$ بفترة الاستقرارية المطلقة للطريقة إذا كانت الطريقة ذات استقرارية مطلقة لجميع قيم $h\lambda$ التي تنتمي للفترة. و في ما يأتي جدول بفترات الاستقرارية المطلقة لبعض طرائق رونكه - كوتا الشائعة مع رتبها و عدد مراحلها:

طريقة رونكه - كوتا	النوع	فترة الاستقرارية	الرتبة	عدد المراحل
أويلرالصريحة (1)	صريحة	$(-2,0)$	1	1
أويلرالضمنية (2)	ضمنية	$(-\infty,0)$	1	1
شبه المنحرف (3)	ضمنية	$(-\infty,0)$	2	2
(4)	صريحة	$(-2,0)$	2	2
الشائعة (5)	صريحة	$(-2.78,0)$	4	4
(6)	ضمنية	$(-6,0)$	2	3

يتضح من الجدول السابق أنّ جميع الطرائق الصريحة تكون فترات استقراريتها المطلقة محدودة. والطرائق ذات فترات استقرارية غير مقيدة $(-\infty,0)$ هي طرائق ضمنية.

المثال (4) : ما طول الخطوة المناسب لحل المسألة $y' = (1-x)y^2, \ \ y(1) = 2$ على الفترة $[1,10]$ باستخدام الطريقة الشائعة (10.6) لرونكه – كوتا (المعادلات 10.37).

الحل: لإيجاد طول الخطوة h المناسب على فترة الحل $[1,10]$ علينا اختيار h بحيث تحقق المتراجحة $-2.78 < h\lambda < 0$ ، حيث $\lambda = -L$ و L هو قيد للمشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة للمتغير y ، أي

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le L \ , \ \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2(1-x)y$$

بما أن $y' < 0$ على الفترة $[1 \ , \ 10)$ فإنّ y دالة متناقصة ويمكن إثبات كونها لا تتقاطع مع المحور-x عليه تكون $0 < y(x) \le 2$ وبالتالي نحصل على القيد

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| < 36$$

أي أن h نختارها بحيث $-2.78 < -36h$. الاختيار $h \approx .07$ يفي بالغرض.

<u>**تخمين الخطأ المحلي المبتور والسيطرة على طول الخطوة:**</u>

Local truncation error and step-size control

إنّ من أشهر الأساليب المستخدمة لتخمين الخطأ الموضعي هو أسلوب طريقة استكمال ريجاردسون (Richardson extrapolations). ويتلخص هذا الأسلوب بما يأتي :

ليكن $\{y_n\}$ الحل العددي الناتج من تطبيق طريقة رونكه - كوتا ذات رتبة p باستخدام طول للخطوة h . فإذا أردنا تخمين الخطأ الموضعي للقيمة العددية y_{n+2} نعود إلى الوراء خطوتين ونطبق الطريقة باستخدام طول الخطوة $2h$ لنحصل على تقريب آخر لقيمة $y(x_{n+2})$ وليكن y^*_{n+2} كما في الشكل (10.13):

$$\begin{array}{ccccc} y_n & --- & \overset{2h}{---} & --\longrightarrow & y^*_{n+2} \\ y_n & \overset{h}{--\longrightarrow} & y_{n+1} & \overset{h}{--\longrightarrow} & y_{n+2} \\ x_n & --\longrightarrow & x_{n+1} & --\longrightarrow & x_{n+2} \end{array}$$

الشكل (10.13)

وبما أن رتبة الطريقة هي p يكون الخطأ الموضعي لقيمة y_{n+2} و y^*_{n+2} على التوالي

$$\begin{aligned} y(x_{n+2}) = y_{n+2} &= h^{p+1}\varphi\big(y(x_{n+1}) + O\big(h^{p+2}\big)\big) \\ &= h^{p+1}\varphi\big(y(x_n) + O\big(h^{p+2}\big)\big) \qquad \textbf{(10.38)} \\ y(x_{n+2}) - y^*_{n+2} &= (2h)^{p+1}\varphi\big(y(x_n) + O\big(h^{p+2}\big)\big) \end{aligned}$$

ومن طرح المعادلتين السابقتين نحصل على قيمة الحد الأساسي للخطأ الموضعي عند x_{n+2}

وهو $h^{p+1}\varphi\big(y(x_n)\big) = \dfrac{y_{n+2} - y^*_{n+2}}{2^{p+1} - 1}$ **أي أن:**

$$E_{n+2} \approx \frac{y_{n+2} - y^*_{n+2}}{2^{p+1} - 1} \qquad \textbf{(10.39)}$$

من الجدير بالذكر أن أسلوب استكمال ريجاردسون أعلاه يكون فعالا فقط للسيطرة على طول الخطوة و ليس مؤشراً لقياس الخطأ الإجمالي $y_{n+2} - y(x_{n+2})$.

المثال (5) : استخدم استكمال ريجاردسون لتخمين الخطأ الموضعي للقيم التقريبية عند $x = 1,\ 2$ الناتجة من استخدام طريقة رونكه - كوتا 4 ذات الرتبة الثانية (المعادلات 10.35) بطول للخطوة $h = 0.5$ لحل المسألة

$$y' = \frac{2y}{x+1}, \qquad y(0) = 1 \qquad 0 \le x \le 2 \ .$$

الحل: لكل قيمة n $(n = 0,\ 1,\ 2)$ نطبق الطريقة باستخدام طول الخطوة $h = 0.5$ مرتين لنحصل على y_{n+2}، ومن ثم نعود إلى x_n ونطبق الطريقة بخطوة طولها $2h$ لنحصل على y^*_{n+2} . بعدها نحسب الخطأ E_{n+2} عند x_{n+2} كما يأتي:

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1), \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = f(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad k_2 = f(x_{n+1} + h, y_{n+1} + hk_1), \quad y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k^*_1 = f(x_n, y_n), \qquad k^*_2 = f(x_n + 2h, y_n + 2hk^*_1), \quad y^*_{n+2} = y_n + \frac{2h}{2}(k^*_1 + k^*_2)$$

$$E_{n+2} = \frac{y_{n+2} - y^*_{n+2}}{2^3 - 1}$$

الجدول الآتي يحتوي على النتائج المطلوبة حيث $e_n = |y_n - y(x_n)|$

x_n	y_n	k_1	k_2	y_n^*	k_1^*	k_2^*	E_n	e_n
0	1.000	2	2.666		2.000	3.000		
0.5	2.166	2.888	3.611					
1	3.792	3.792	4.550	3.500	3.792	5.056	0.0417	0.208
1.5	5.877	4.702	5.485					
2	8.424			8.215			0.0298	0.576

10.5 الحلول العددية لمنظومات مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الأولى

(Numerical solutions of linear IVP systems)

تطرقنا في الفصل السابق إلى الحلول التحليلية لمنظومات المعادلات التفاضلية واقتصرت الحلول على منظومات مسائل القيم الابتدائية الخطية لأن التعامل مع المنظومات غير الخطية قد يكون صعبا و في بعض الأحيان مستحيلا. في هذا البند سنبين كيفية تعميم الطرائق العددية التي سبق أن استخدمت لمسائل القيم الابتدائية لتشمل الحلول العددية لمنظومات مسائل القيمةالابتدائية من الرتبة الأولى، الخطية منها أو غير الخطية. وكذلك مسائل القيم الابتدائية من الرتب العليا بعد تحويلها لمنظومات من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى. لتكن لدينا منظومة القيم الابتدائية

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x,y) \ , \quad x(a) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} &= g(t,x,y) \ , \quad y(a) = y_0 \end{aligned} \qquad \textbf{(10.40)}$$

والمطلوب إيجاد حل عددي للمنظومة على الفترة $[a,b]$. أي متتابعة من التقريبات

$$\{x_n \cong x(t_n) \ , \ y_n \cong y(t_n) \ , \ t_n = a + nh \ , \ n = 0,1,2, \ \ldots\}$$

سنكتفي في هذا البند بتعميم بعض الطرائق المذكورة في البنود السابقة ويمكن للطالب بشكل مشابه تعميم الطرائق الأخرى.

طريقة أويلر الصريحة

لتطبيق هذه الطريقة على منظومة القيم الابتدائية (10.40) يتم تعميمها كالآتي:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + hg(t_n, x_n, y_n), \quad n = 0,\ 1,\ 2, \Lambda \qquad \textbf{(10.41)}$$

المثال (1): لمنظومة القيمة الابتدائية

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 4y \ \ , \ \ x(0) = 1$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x + 2y \ \ , \ \ y(0) = 2$$

أ- استخدم طريقة أويلر الصريحة بطول للخطوة $h = 0.2$ لتخمين $x(0.2), y(0.2)$

ب- أعد استخدام طريقة أويلر الصريحة ولكن بطول للخطوة $h = 0.1$.

ج- استخدم إستكمال ريجاردسون لتحسين القيم المخمنة.

د- جد الحل الفعلي ثم قارن النتائج مع القيم الفعلية.

الحل:

أ- بتعويض قيمة $n = 0$ في المعادلات (10.41) واستخدام بيانات المسألة نحصل على التخمين عند $t = 0.2$ في حالة استخدامنا لطول الخطوة $h = 0.2$

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0, y_0) = 1 + (0.2) f(0,1,2) = 1 + (0.2)(11) = 3.2$$
$$y_1 = y_n + hg(t_0, x_0, y_0) = 2 + (0.2) g(0,1,2) = 2 + (0.2)(7) = 3.4$$

ب- أما في حالة استخدامنا لطول الخطوة $h = 0.1$ فنحتاج الى استخدام طريقة أويلر الصريحة مرتين للوصول للتخمين عند $t = 0.2$.

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0, y_0) = 1 + (0.1) f(0,1,2) = 1 + (0.1)(11) = 2.1$$
$$y_1 = y_0 + hg(t_0, x_0, y_0) = 2 + (0.1) g(0,1,2) = 2 + (0.1)(7) = 2.7$$

$$\begin{aligned} x_2 = x_1 + hf(t_1, x_1, y_1) &= 2.1 + (0.1) f(0.1, 2.1, 2.7) \\ &= 2.1 + (0.1)(17.1) = 3.81 \\ y_2 = y_1 + hg(t_1, x_1, y_1) &= 2.7 + (0.1) g(0.1, 2.1, 2.7) \\ &= 2.7 + (0.1)(11.7) = 3.87 \end{aligned}$$

ج- بإدراج القيم التخمينية التي حصلنا عليها في الفرعين أ و ب في جدول واستخدام معادلة الاستكمال (10.12) نحصل على:

h	n	x_{n1}	y_{n1}	x_{n2}	y_{n2}
0.2	1	3.2	3.4		
0.1	2	3.81	3.87	4.42	4.34

حيث $x_{22} = \dfrac{2x_{21} - x_{11}}{2-1} = 4.42, \quad y_{22} = \dfrac{2y_{21} - y_{11}}{2-1} = 4.34$ **هي القيم المحسنة.**

د- لإيجاد الحل الفعلي لمسألة القيم الابتدائية يمكن أن يرجع الطالب الى المثال (1) من البند 9.3 و الحصول على حل مسألة القيم الابتدائية

$$Z(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} -5/7 \\ 5/7 \end{bmatrix} + e^{6t}\begin{bmatrix} 12/7 \\ 9/7 \end{bmatrix}$$

أي أن دوال الحل هي:

$$x(t) = \frac{-5}{7}e^{-t} + \frac{12}{7}e^{6t}$$
$$y(t) = \frac{5}{7}e^{-t} + \frac{9}{7}e^{6t}$$

ومنها نحصل على القيم الفعلية عند $t = 0.2$، **أي**

$$x(0.2) = 5.107, \quad y(0.2) = 4.853$$

يتضح جليا أنّ أقرب قيم عددية للقيم الفعلية هي التي حصلنا عليها بعد الاستكمال، و لكنها مازالت بعيدة بعض الشيء. بإمكان الطالب إعادة حل المثال باستعمال $h = 0.1,\ 0.05$ **للحصول على قيم عددية أفضل.**

المثال (2): استخدم طريقة أويلر الصريحة لتخمين $x(0.4),\ y(0.4)$ **حيث**

$$\frac{dx}{dt} = 8y + e^{3t} \quad , \quad x(0) = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + t \quad , \quad y(0) = \frac{-1}{16}$$

مستعملا طول الخطوة أ- $h = 0.2$ **و ب-** $h = 0.1$ **ثم قارن النتائج مع القيم الفعلية، علما أنّ الحل الفعلي هو**

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{4t}-\frac{1}{14}e^{-4t}-\frac{3}{7}e^{3t}-\frac{1}{2}t$$
$$y(t)=\frac{1}{4}e^{4t}-\frac{1}{28}e^{-4t}-\frac{2}{7}e^{3t}-\frac{1}{16}$$

الحل: لدينا

$$f(t,x,y)=8y+e^{3t},\quad g(t,x,y)=2x+t,\quad x(0)=0,\quad y(0)=-1/16$$

أ- بتعويض قيمة $n=0$ و $h=0.2$ في المعادلات (10.41) واستخدام بيانات المسألة نحصل على التخمين عند $t=0.2$

$$x_1=x_0+hf(t_0,x_0,y_0)=0+(0.2)f(0,0,\frac{-1}{16})=0.1$$
$$y_1=y_0+hg(t_0,x_0,y_0)=\frac{-1}{16}+(0.2)g(0,0,\frac{-1}{16})=-0.0625$$

الجدول الآتي يكمل النتائج المطلوبة لهذا الفرع:

n	t_n	x_n	y_n	$\lvert x_n-x(t_n)\rvert$	$y_n-y(t_n)$
0	0.0	0.0000	– 0.0625	0.0000	0.0000
1	0.2	0.1000	– 0.0625	0.0998	0.0518
2	0.4	0.3644	0.0175	0.4748	0.2169

ب- أما في حالة استخدامنا لطول الخطوة $h=0.1$ فسنحصل على قيم تقريبية أفضل كما مبين في الجدول الآتي:

n	t_n	x_n	y_n	$\lvert x_n-x(t_n)\rvert$	$y_n-y(t_n)$
0	0.0	0.0000	– 0.0625	0.0000	0.0000
1	0.1	0.05100	– 0.0625	0.0195	0.0112
2	0.2	0.1380	– 0.0425	0.0648	0.0318
3	0.3	0.2832	0.0045	0.1512	0.0071
4	0.4	0.5328	0.0911	0.3064	0.1432

<u>طريقة رونكه - كوتا الصريحة ذات المرحلتين والرتبة الثانية</u>

لتطبيق هذه الطريقة على مسألة القيم الابتدائية (10.40) علينا تعميمها كما يأتي:

$$k_1 = f(t_n, x_n, y_n), \qquad m_1 = g(t_n, x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + h, x_n + hk_1, y_n + hk_1), \quad m_2 = g(t_n + h, x_n + hm_1, y_n + hm_1)$$
$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(m_1 + m_2)$$
$$n = 0,1,2,\ldots \qquad \textbf{(10.42)}$$

المثال (3): أعد حل المثال (1) مستخدما طريقة رونكه – كوتا الصريحة ذات المرحلتين والرتبة الثانية.

الحل: لدينا لمعلومات

$$f(t,x,y) = 3x + 4y, \quad g(t,x,y) = 3x + 2y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2$$

أ- بتعويض قيمة $n = 0$ **في المعادلات (10.42) واستخدام بيانات المسألة نحصل على التخمين عند** $t = 0.2$ **في حالة استخدامنا لطول الخطوة** $h = 0.2$

$$k_1 = f(t_0, x_0, y_0) = f(0,1,2) = 11.0,$$
$$k_2 = f(t_0 + h, x_0 + hk_1, y_0 + hk_1) = 26.1$$
$$x_1 = x_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 4.71$$
$$m_1 = g(t_0, x_0, y_0) = g(0,1,2) = 7.0,$$
$$m_2 = g(t_0 + h, x_0 + hm_1, y_0 + hm_1) = 14.0$$
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(m_1 + m_2) = 4.1$$

ب- أما في حالة استخدامنا لطول الخطوة $h = 0.1$ **فنحتاج الى استخدام طريقة أويلر الصريحة مرتين للوصول للتخمين عند** $t = 0.2$**.**

$$k_1 = f(t_0, x_0, y_0) = f(0,1,2) = 11.0, \quad k_2 = f(t_0 + h, x_0 + hk_1, y_0 + hk_1) = 18.7$$
$$x_1 = x_0 + \frac{0.1}{2}(k_1 + k_2) = 2.485$$
$$m_1 = g(t_0, x_0, y_0) = g(0,1,2) = 7.0, \quad m_2 = g(t_0 + h, x_0 + hm_1, y_0 + hm_1) = 10.5$$
$$y_1 = y_0 + \frac{0.1}{2}(m_1 + m_2) = 2.875$$

$$k_1 = f(t_1, x_1, y_1) = 18.955, \quad k_2 = f(t_1 + h, x_1 + hk_1, y_1 + hk_1) = 32.223$$
$$x_2 = x_1 + \frac{0.1}{2}(k_1 + k_2) = 5.044$$
$$m_1 = g(t_1, x_1, y_1) = 13.205, \quad m_2 = g(t_1 + h, x_1 + hm_1, y_1 + hm_1) = 19.807$$
$$y_2 = y_1 + \frac{0.1}{2}(m_1 + m_2) = 4.526$$

ج- بإدراج القيم التخمينية التي حصلنا عليها في الفرعين أ و ب في جدول واستخدام معادلة الأستكمال (10.12) نحصل على:

h	n	x_{n1}	y_{n1}	x_{n2}	y_{n2}
0.2	1	4.71	4.1		
0.1	2	5.044	4.526	5.378	4.952

حيث $x_{22} = \dfrac{2x_{21} - x_{11}}{2-1} = 5.375, \quad y_{22} = \dfrac{2y_{21} - y_{11}}{2-1} = 4.952$ **هي القيم المحسنة.**

د- بالمقرنة مع القيم الفعلية عند $t = 0.2$**، أي**

$$x(0.2) = 5.107, \quad y(0.2) = 4.853$$

يتضح جليا أنّ أقرب قيم عددية للقيم الفعلية هي التي حصلنا عليها بعد الاستكمال، وهي أفضل من التقريبات التي حصلنا عليها في المثال (1) من هذا البند. بإمكان الطالب إعادة حل المثال باستعمال $h = 0.1, \ 0.05$ **للحصول على قيم عددية أفضل، كما هو متوقع عندما تكون رتبة الطريقة العددية أعلى.**

المثال (4): لمنظومة القيم الإبتدائية:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}y \qquad , \quad x(0)=1$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{-1}{2(t+1)x}, \quad y(0)=1$$

أ- استخدم طريقة رونكه – كوتا الصريحة ذات المرحلتين $s=2$ و الرتبة $p=2$ بطول للخطوة $h=0.5$ لتخمين $x(1)$. أعد استخدام الطريقة ولكن بطول للخطوة $h=0.2$.

ب- استخدم طريقة رونكه - كوتا الصريحة ذات المراحل $s=4$ و الرتبة $p=4$ بطول للخطوة $h=0.5$ لتخمين $x(1)$.

ج- قارن النتائج التي حصلت عليها في أ و ب مع القيمة الفعلية، علما أنّ

$$x(t)=\sqrt{t+1}, \quad y(t)=\frac{1}{\sqrt{t+1}} \quad .$$

الحل: باستخدام بيانات المسألة مع $h=0.5$ في المعادلات (10.39) نحصل على:

n	t_n	x_n	y_1	k_1	k_2	m_1	m_2	$\lvert x_n-x(t_n)\rvert$	$\lvert y_n-y(t_n)\rvert$
0	0	1	1	.5	.625	$-.5$	$-.444$	0	0
1	.5	1.28	.764	.382	.477	$-.260$	$-.217$	.056	.053
2	1	1.49	.644					.082	.063

و بتبديل طول الخطوة الى $h=0.2$ نحصل على الجدول الآتي:

n	t_n	x_n	y_1	k_1	k_2	m_1	m_2	$\lvert x_n-x(t_n)\rvert$	$\lvert y_n-y(t_n)\rvert$
0	0	1	1	.5	.550	$-.500$	$-.463$	0	0
1	.2	1.11	.904	.452	.497	$-.377$	$-.347$	.009	.092
2	.4	1.20	.831	.416	.457	$-.298$	$-.274$	.017	.014
3	.6	1.29	.774	.387	.426	$-.243$	$-.224$	.022	.016
4	.8	1.37	.727	.364	.400	$-.203$	$-.188$	.027	.018
5	1	1.44	.688					.031	.019

المثال (5): لمسألة القيم الابتدائية:

$$x''+3x'+2x=0, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=-3 \qquad \textbf{(10.43)}$$

أ- استخدم طريقة أويلر الصريحة بطول للخطوة $h=0.2$ لإيجاد حل عددي على الفترة $[0,1]$.

ب- جد الحل الفعلي وقارن النتائج التي حصلت عليها في أ مع القيم الفعلية.

الحل: بداية نحول مسألة القيم الابتدائية من الرتبة الثانية الى منظومة معادلات من الرتب الأولى، و ذلك بفرض $y = x'$ **لنحصل على منظومة القيم الابتدائية:**

$$
\begin{aligned}
x' &= y, && x(0) = 0 \\
y' &= -2x - 3y, && y(0) = -3
\end{aligned}
$$

باستطاعة الطالب بسهولة إيجاد الحل الفعلي لمسألة القيم الابتدائية (10.43) بوصفها متجانسة بمعاملات ثابتة، و هو $x(t) = -3e^{-t} + 3e^{-2t}$ **. لإيجاد الحل العددي لدينا**

$$f(t,x,y) = y,\ \ g(t,x,y) = -2x - 3y,\ \ x(0) = 0,\ \ y(0) = -3$$

بتعويض قيمة $h = 0.2$ **في المعادلات (10.41) واستخدام بيانات المسألة نحصل على الحل العددي في الجدول الآتي:**

n	t_n	x_n	y_n	$\lvert x_n - x(t_n)\rvert$
0	0.0	0.0000	-3.0000	0.0000
1	0.2	-0.6000	-1.2000	0.1550
2	0.4	-0.8400	-0.2400	0.1770
3	0.6	-0.8880	0.2400	0.1451
4	0.8	$-.8400$	0.4512	0.0977
5	1.0	-0.7500	0.5165	0.0521

المثال (6): لمنظومة المعادلات غير الخطية $\dfrac{dx}{dt} = y \ ,\ \dfrac{dy}{dt} = -\sin x$

أ- ارسم حقلا اتجاهيا مرتبطا بالمنظومة على المنطقة المستطيلة:

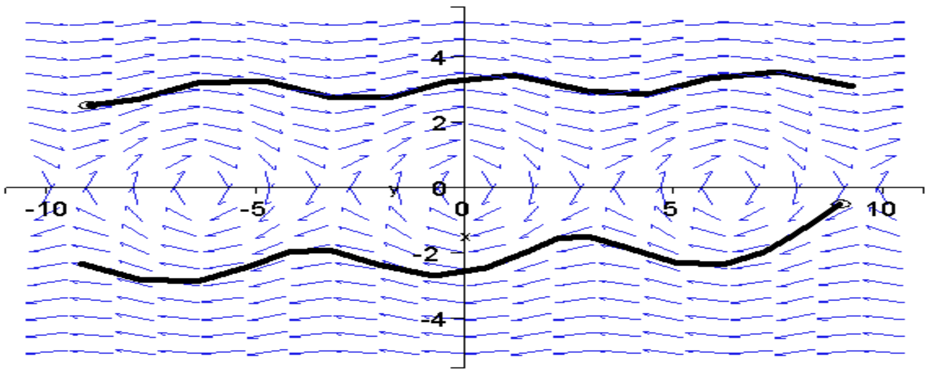
$$R = \{(x,y) : -10 \le x \le 10, -5 \le y \le 5\}$$

ب- استخدم طريقة أويلر الصريحة بطول للخطوة $h = 0.5$ **لإيجاد حل عددي يحقق القيم الابتدائية** $x(0) = -9 \ ,\ y(0) = 2.5$ **.**

ج- استخدم طريقة أويلر الصريحة بطول للخطوة $h = 0.5$ **لإيجاد حل عددي يحقق القيم الإبتدائية** $x(0) = 9 \ ,\ y(0) = -0.5$ **.**

د- ارسم نقاط الحلين العدديين (x_n, y_n) **و بين فيما لو كانا يتماشان مع الحقل الاتجاهي للمنظومة.**

الحل: أ- باستخدام أوامر ميبل الخاصة بالحقول الاتجاهية نحصل على الشكل



الشكل (10.15)

ب- باستخدام بيانات المسألة

$$f(t,x,y)=y,\ \ g(t,x,y)=-\sin x,\ \ x(0)=-9,\ \ y(0)=2.5,\ \ h=0.5$$

وتعويضها في المعادلات (10.41) نحصل على الحل العددي في الجدول الآتي:

n	t_n	x_n	y_n
0	0.0	−9.0	2.5
1	0.5	−7.7	2.7
2	1.0	−6.4	3.2
3	1.5	−4.8	3.3
4	2.0	−3.2	2.8
5	2.5	−1.8	2.7
M			

ج- لإيجاد حل عددي يحقق القيم الابتدائية $y(0)=-0.5$, $x(0)=9$ **ندخل المعلومات المتوفرة على طريقة أويلر الصريحة فتولد لنا الحل العددي الآتي:**

n	t_n	x_n	y_n
0	0.0	9.00	-0.50
1	0.5	8.75	-0.71
2	1.0	8.40	-1.02
3	1.5	7.89	-1.45
4	2.0	7.16	-1.9
5	2.5	6.19	-2.33
$\vdots$			

د- برسم نقاط الحلين العدديين $\{(x_n, y_n)\}$ مع الحقل الاتجاهي نلاحظ أنّ كليهما يتماشان مع إتجاهات الحقل (أنظر الشكل 10.15).

10.6 المخرجات التعليمية للفصل (Learning outcomes)

بعد الانتهاء من دراسة الفصل يكون الطالب قد أتقن المخرجات التعليمية الآتية:

1. **التعرف على العلماء الرياضيين الذين أسهموا في تطوير الطرائق العددية لحل المعادلات التفاضلية.**
2. **التمييز بين المسائل التي يمكن حلها بالطرائق القياسية المباشرة والتي يستخرج فيها الحل باستخدام الطرائق العددية.**
3. **التعرف على أنواع الحلول العددية والطرائق العددية المستخدمة.**
4. **التعرف على الحلول العددية التقريبية وتصنيفها.**

5. استخدام طرائق اويلر العددية لإيجاد الحلول التقريبية لمعادلة تفاضلية.
6. استخدام خوارزمية استكمال ريجاردسون مع خوارزمية أُويلر الصريحة لإيجاد الحلول العددية وتمثيلها هندسياً.
7. تصنيف أنواع الخطأ وتقدير حجم الخطأ الناتج من استخدام الطرائق العددية.
8. استخدام الطرائق المختلفة في حساب التقريب، ومن ضمنها الطرائق الخطية المتعددة الخطوات.
9. المقدرة على إيجاد رتب الطرائق الخطية متعددة الخطوات .
10. استخدام طرائق آدمز العددية وتخمين الخطأ للسيطرة على طول الخطوة.
11. استخدام طرائق رونكه - كوتا وقياس الاستقرارية المطلقة لها .
12. تخمين الخطأ المحلي المبتور والسيطرة على طول الخطوة.
13. إيجاد الحلول العددية لمنظومات مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الأولى .
14. استخدام طرائق رونكه - كوتا الصريحة لإيجاد الحلول العددية لمنظومات المعادلات الخطية .
15. المقدرة على استخدام القرص الممغنط المرافق للكتاب لمراجعة محتويات الكتاب.

تماريـــــن الفصل العاشـر

1. جد حلا تقريبيا لمسألة القيمة الابتدائية $y' = x + y, \quad y(0) = 1$ ، حيث $0 \le x \le 2, \;\; h = 1$ ، مستعينا بالأسلوب المذكور في المثال (1) من البند (10.1). قارن القيمة التقريبية عند $x = 2$ مع القيمة الفعلية $y(2)$ ثم حاول تحسين الحل التقريبي بمضاعفة نقاط التجزئة.
2. أعد حل السؤال الأول حيث:

$$y' = x + xy^2, \qquad y(0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \quad h = 0.5$$

3. **جد حلاً تقريبياً لمسألة القيمة الابتدائية** $y(0)=1$ $\quad y'=x+y,$ **بصيغة حدودية من الدرجة الخامسة مستعينا بالأسلوب المذكور في المثال (2) من البند (10.1)، ثم قدر قيمة** $y(2)$ **. هل بإمكانك الحصول على قيمة تقريبية أفضل؟ كيف ؟**

4. **جد حلاً تقريبياً لمسألة القيمة الابتدائية** $y(0)=1$ $\quad y'=2x-x^3y,$ **بصيغة حدودية من الدرجة السابعة مستعينا بالأسلوب المذكور في المثال (2) من البند (10.1)، ثم قدر قيمة** $y(2)$ **. هل بإمكانك الحصول على قيمة تقريبية أفضل؟ كيف ؟**

5. **استخدم كلا من الطرائق الآتية مع خطوة طولها** $h=0.5$ **لتخمين قيمة** $y(2)$ **، حيث** $y(1)=1$ $\quad y'=y^2-\dfrac{2}{x^2},$ **. ثم قارن النتائج مع الحل الفعلي** $y=\dfrac{1}{x}$ **، و علق عليها.**

أ- **طريقة أويلر الصريحة**

ب- **طريقة النقطة الوسطية**

ت- **طريقة رونكه – كوتا الصريحة ذات المرحلتين**

ث- **كرر ما سبق مع خطوة طولها** $h=0.25$

6. **أعد حل السؤال الخامس حيث** $y(0)=1$ $\quad y'=\dfrac{-y}{x+1},$ **، و الحل الفعلي** $y=\dfrac{1}{x+1}$ **.**

7. **استخدم طريقة أويلر الصريحة لإيجاد حلول عددية على الفترة** $[0,1]$ **لمسألة القيمة الابتدائية:** $y(0)=1$ $\quad y'=\dfrac{2y}{x+1},$ ،

أ- **مع أطوال للخطوة** $h=1,\ 0.5,\ 0.25$ **.**

ب- **ارسم الحلول العددية و قارنها مع الحل الفعلي. ماذا تستدل عند تصغير طول الخطوة** h؟

ت- **استخدم الاستكمال لإيجاد قيم تقريبية أفضل لقيمة** $y(1)$ **الفعلية.**

8. **أعد حل السؤال السابع حيث** $y(0)=1$ $\quad y'=2y,$ **.**

9. **جد صيغة الحل العددي المتولد من تطبيق طريقة أويلر الصريحة على مسألة القيمة الابتدائية** $y'=-xy,\quad y(0)=1$ **باستخدام خطوة طولها** h **. وضح لماذا تكون الطريقة غير ملائمة عندما يكون الحل العددي مطلوبا على الفترة** $[0,\infty)$ **هل تكون طريقة أويلر الضمنية ملائمة ؟ لماذا؟**

للمسائل من 10 – 12 استخدم طريقة أويلر الضمنية بطول للخطوة $h=0.5$ لتقريب قيمة $y(1)$ ، ثم اختبر النتيجة التي حصلت عليها وذلك بوصفها قيمة ابتدائية جديدة وتطبيق طريقة أويلر الصريحة بطول للخطوة $h=-0.5$ للحصول على تقريب لقيمة $y(0)$. هل الطريقتان نظيرتان (inverses) لبعضهمـــــــا ؟

10. $y'=-y, \quad y(0)=2$

11. $y'=\dfrac{-y}{x+1}, \quad y(0)=1$

12. $y'=\dfrac{-2y}{x^2+1}, \quad y(0)=1$

للمسائل من 13 – 14 استخدم الطريقتين أويلر الصريحة و أويلر الضمنية كزوج للتنبوء والتصحيـح (predictor-corrector) مع طول الخطوة $h=0.5$ لتخمين $y(1)$ حيــث

أ- عدم تكرار التصحيح.

ب- بتكرار التصحيح مرتين في كل خطوة

ت- قارن بين النتائج التي حصلت عليهـــــــــــــا والحل الفعلي.

13. $y'=-5xy, \quad y(0)=1$

14. $y'=\dfrac{-y}{x+2}, \quad y(0)=1$

15. استخدم طريقة النقطة الوسطية مع خطوة طولها $h=0.5$ لتخمين $y(2)$ حيـــــث

$$y'=\frac{-2y}{x+1}, \quad y(0)=1$$ ،

أ- استخدم طريقة تايلور لتهيئة القيم الابتدائية اللازمة.

ب- جد حل المسألة الفعلي ثم أعد استخدام الطريقة العددية مستعملا قيماً ابتدائية مضبوطة.

ت- هل طول الخطوة $h=0.5$ يتعارض مع شرط الاستقرارية المطلقة للطريقة؟ أذكر الأسباب لإجابتك.

استخدم طريقتي آدمز- باشفورث و آدمز– مولتن من الرتبة الثانية كزوج للتنبوء والتصحيـح (predictor-corrector) مع خطوة طولها $h=0.5$ لإيجاد حل عددي للمسألتين 16 – 17

على الفترة $[1,3]$. استعمل طريقة مايلن لتخمين الخطأ لكل قيمة تقريبية حصلت عليها، آخذاً بنظر الاعتبارما يأتي:

أ- استخدم الحل الفعلي لتهيئة القيم الابتدائية اللازمة.

ب- عدم تكرار التصحيح (أي $m=1$).

ت- تكرار التصحيح مرتين (أي $m=2$).

ث- قارن النتائج التي حصلت عليهـــــــــــــا مع الحل الفعلي .

16. $y' = -3x^2y^2\,,\quad y(1)=0.5$ **17.** $y' = -x\;y^2\,,\quad y(1)=0.5$

18. أعد حل السؤال 16 باستخدام طريقتي آدمز- باشفورث و آدمز– مولتن من الرتبة الرابعة.

19. أعد حل السؤال 17 باستخدام طريقتي آدمز- باشفورث و آدمز– مولتن من الرتبة الرابعة.

20. أعد حل المثال (1) من البند (10.5) باستخدام $h=0.1,\ 0.05$.

21. جد حلا عدديا على الفترة $[0,2]$ لمنظومة القيم الابتدائية:

$$x' = \frac{y}{2}, \qquad x(0)=1$$

$$y' = \frac{-1}{2(t+1)x}, \quad y(0)=1$$

باستعمال طول الخطوة $h=0.4$ مع طريقة

أ- **أويلر الصريحة،**

ب- **رونكه – كوتا الصريحة ذات المرحلتين**

ت- **قارن النتائج التي حصلت عليهـا مع الحل الفعلي ($y=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\ ,\ x=\sqrt{1+t}$).**

22. استخدم طريقة النقطة الوسطية لإيجاد حل عددي للمسألة 21 ثم قارن النتائج مع الحل الفعلي.

23. استخدم طريقة أويلر الصريحة لتخمين $x(2)$ و $y(2)$ حيث

$$x' = \frac{y-1}{x} + 2 - t, \quad x(1) = 2$$
$$y' = \frac{y-1}{x} + 1 + t, \quad y(1) = 1$$

أ- **باستعمال أطوال الخطوة** $h=1$ ، $h=0.5$ ، $h=0.25$ **.**

ب- **قارن النتائج مع قيم الحل الفعلي (** $x(t) = t+1, \;\; y(t) = t^2$ **).**

ث- **استخدم الاستكمال لتحسين القيم التخمينية.**

24. أعد حل السؤال 23 باستخدام طريقة رونكه – كوتا الصريحة ذات المرحلتين.

25. استخدم طريقة أويلر الضمنية مع طول الخطوة $h = 0.5$ **لتخمين** $x(1)$ **و** $y(1)$ **حيث:**

$$x' = \frac{y}{t+1} - t, \quad x(0) = 1$$
$$y' = 2x \qquad , \quad y(0) = 1$$

قارن النتائج مع قيم الحل الفعلي $x(t) = t+1, \;\; y(t) = (t+1)^2$ **.**

26. استخدم طريقة أويلر الضمنية مع طول الخطوة $h = 0.5$ **لتخمين** $x(1)$ **و** $y(1)$ **حيث:**

$$x' = -y, \quad x(0) = 1$$
$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1$$

قارن النتائج مع قيم الحل الفعلي ($x(t) = \frac{1}{1+t}, \;\; y(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$ **).**

27. استخدم طريقة رونكه – كوتا الصريحة ذات المرحلتين مع طول الخطوة $h = 0.5$ **لتخمين** $x(1)$ **و** $y(1)$ **حيث:**

$$x' = y - tx + 1, \quad x(0) = 0$$
$$y' = x + t \qquad , \quad y(0) = 0$$

ثم استخدم استكمال ريجاردسون لتخمين الخطأ في القيم التي وجدتها وقارنها مع الخطأ الفعلي.

28. أعد حل السؤال 27 لكن باستخدام طريقة رونكه – كوتا الصريحة ذات المراحل الأربع.

29. استخدم طريقة أويلر الصريحة بخطوة طولها $h=0.1$ لإيجاد حل عددي على الفترة $[0,0.5]$ لمسألة القيم الابتدائية:

$$x''+2x'+x=0 \ , \ \ x(0)=0, \ \ x'(0)=1$$

ثم قارن النتائج مع الحل الفعلي للمسألة.

30. لمنظومة المعادلات غير الخطية

$$\frac{dx}{dt}=-3x+y \ , \ \ \frac{dy}{dt}=2x-4y$$

أ- ارسم حقلا اتجاهيا مرتبطا بالمنظومة على المنطقة:

$$R=\{(x(t),y(t)):0\le t\le 1\}$$

ب- استخدم طريقة أويلر الصريحة بطول للخطوة $h=0.2$ لإيجاد حل عددي يحقق القيم الابتدائية $x(0)=5 \ , \ \ y(0)=2$.

ج- استخدم طريقة أويلر الصريحة بطول للخطوة $h=0.2$ لإيجاد حل عددي يحقق القيم الابتدائية $x(0)=4 \ , \ \ y(0)=5$.

د- ارسم نقاط الحلين العدديين (x_n,y_n) و بين فيما لو كانا يتماشيان مع الحقل الاتجاهي للمنظومة.