الفصل الثاني

معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى وطرائق حلها

(First order DE with solution methods)

يتناول هذا الفصل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى بأنواعها المختلفة: الخطية وغير الخطية والمتجانسة وغير المتجانسة، والتامة... مع طرائق حلها والإكثار من الأمثلة لتوضيح الطريقة. يعود الفضل في تطوير طرائق حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى الى:

- السويسري جاكوبي برنولى (Bernoulli) خلال الفترة (1654- 1705م)، الذي ينتمي الى عائلة رياضية معروفة. اشتهر بالاضافة الى المعادلات التفاضلية بالسلاسل غير المنتهية واكتشف الإحداثيات القطبية وعدد برنولي الذي يظهر عند ايجاد مفكوك سلسلة الدالة $\tan x$. كما أسهم في تطوير نظرية المرونة (Elasticity) ونظرية الاحتمالات، ويعود الفضل في إظهار ما توصل اليه برنولي، وطريقته في حل معادلته التفاضلية، الى لايبنز (Leibniz) خلال الفترة (1646- 1716م) .

- الفرنسي اليكسز كليرت (Alexis C. Clairaut) خلال الفترة (1713- 1765م)، ولد في باريس وأصدر كتابه الأول في الرياضيات وهو في عمر **11** سنة، ويعد أول من اكتشف الحل المنفرد للمعادلة التفاضلية، تميز أيضاً في الفيزياء والفلك.

- الايطالي جاكوبي ريكاتي (Riccati) خلال الفترة (1676- 1754م)، الذي اشتهر بالرياضيات والفيزياء، وعلم النفس. وينسب اليه فضل تعريف الايطاليين بنظريات نيوتن، العالم الذي سبق أن جاء ذكره في مقدمة الفصل الأول، وهو أيضاً قد أسهم في تطويرالمعادلات التفاضلية حين حاول تفسير الظواهر الفيزياوية لقانون نيوتن الثاني في الحركة $F = ma$ حيث إنّ F تمثل القوة المؤثرة على الجسم والثابت m يمثل كتلة الجسم ، وإنّ a تمثل التسارع. إذا اعتبرنا $x(t)$ تمثل موقع الجسم عند أي زمن t ، فإنّ سرعة الجسم هي المشتقة $\frac{dx}{at} = v$ وإنّ التسارع هو $\frac{dv}{dt} = a$. عليه إنّ قانون نيوتن الثاني $F = ma$ يصبح: $-mg = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$ أي: $\frac{d^2x}{dt^2} = -g$ ، حيث إنّ g هو التعجيل الارضي وان الاتجاه الموجب هو نحو الأعلى. وهي معادلات تفاضلية تهمنا كثيراً.

الآن سنبدأ بطرائق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.

2.1 فصل المتغيرات (Separation of variables)

لقد شاهدنا سابقاً أنه يمكن الحصول على حل بعض المعادلات التفاضلية من خلال إجراء عملية تكامل طرفي المعادلة مباشرةً، في هذا البند سنحاول تطوير هذه الفكرة.

التعريف (2.1): يقال للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ذات الصيغة:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) f(y) \qquad (2.1)$$

بإنّها قابلة لفصل المتغيرات.

يعود السبب لهذه التسمية الى كون الطرف الأيمن من المعادلة يحتوي على دالتين منفصلتين، الأولى g تحوي المتغير المستقل x والثانية f تحوي المتغير المعتمد y . سنميز حالتين:

1. **إذا كانت $f(y)$ دالة ثابتة ولتكن k، أي أنّ المعادلة التفاضلية (2.1) تصبح:** $\frac{dy}{dx} = kf(x)$

عندئذٍ بإجراء عملية التكامل نحصل على الحل وهو: $y = k\int f(x)dx + c = F(x) + c$ **، حيث إنّ التكامل هنا غير محدد (عكس المشتقة) وإنّ c هو ثابت التكامل.**

المثال (1): جد حل المعادلة التفاضلية الآتية: $\frac{dy}{dx} = 2 + e^{3x}$

الحل: بإجراء عملية التكامل نحصل على الحل:

$$y = \int (2 + e^{3x})dx + c = 2x + \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

كما أشرنا في الفصل الأول إلى أنّ الحل يمثل عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة. لغرض التحقق من صحة الحل، نشتق الحل فنحصل على المعادلة التفاضلية (تحقق من ذلك).

المثال (2): جد حل مسألة القيمة الابتدائية: $\frac{dy}{dx} = 1 - \cos 3x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3}$

الحل: بإجراء عملية التكامل نحصل على الحل العام :

$$y = \int (1 - \cos 3x)dx + c = x - \frac{1}{3}\sin 3x + c$$

وعند التعويض بالشرط الابتدائي $y(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3}$ نحصل على:

$$\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\sin 3(\frac{\pi}{2})+c=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}+c$$

إذاً $c=-\frac{\pi}{2}$ وعليه إنّ الحل الخاص هو: $y=x-\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{\pi}{2}$ ،

تحقق من صحة الحل؟

2. إذا كان $f(y)$ غير ثابت أي دالة بالمتغير y ، فعندئذٍ المعادلة (2.1) يمكن كتابتها بالصيغة:

$$\frac{dy}{f(y)}=g(x)\,dx \qquad (2.2)$$

وبإجراء عملية التكامل:

$$\int\frac{dy}{f(y)}=\int g(x)\,dx+c$$

نحصل على عائلة المنحنيات بمَعْلَمَة واحدة.

ملاحظات:

(ا) عند الانتقال من المعادلة (2.1) الى المعادلة (2.2) استخدمنا تعريف المفاضل، أي:

$$dy=(\frac{dy}{dx})\,dx=g(x)\;f(y)\,dx\,.$$

(ب) عند إجراء عملية التكامل على المعادلة (2.2)، يمكن إضافة ثابت التكامل c الى الطرف الأيمن أو الى الطرف الأيسر أو الى كلتا الطرفين. في جميع الاحتمالات يكون الناتج متساوياً، لنتفق على إضافة الثابت الى الطرف الذي فيه المتغير x .

المثال (3): حل المعادلة التفاضلية الآتية: $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

الحل: نبدأ بفصل المتغيرات، فنحصل على: $ydy=-xdx$ ، ثم بإجراء عملية التكامل نحصل على: $\int y\;\;dy=-\int x\;\;dx+c$ ، أي: $\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}c^2$ ومنها نحصل على عائلة المنحنيات: $x^2+y^2=c^2$. وهي عبارة عن عائلة دوائر مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها c.

ملاحظة: في المثال السابق أخذنا الثابت $\frac{1}{2}c^2$ ، بالطبع لامانع من اختيار الثابت حسب ما هو مناسب شريطة أن يؤدي الاختيار الى تبسيط المعادلة.

المثال (4): حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2+1}$

الحل: بإجراء عملية فصل المتغيرات نحصل على: $\frac{dy}{y}=\frac{xdx}{x^2+1}$ **، وبإجراء التكامل، نحصل على:**

$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\ln|c|$ **، وبإجراء عملية التبسيط نحصل على عائلة الحلول بمَعْلَمَة واحدة:**

$$y=c\sqrt{x^2+1}$$

نلاحظ أنّ $y=0$ **هو أيضا حل للمعادلة التفاضلية في المثال (4) ولكنه لا ينتمي الى عائلة الحلول.**

إذن $y=0$ **حل منفرد للمعادلة التفاضلية.**

المثال (5): حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx}=y^2-4$

الحل: بإجراء فصل المتغيرات نحصل على $\frac{dy}{y^2-4}=dx$ **، وبإجراء عملية التكامل بالكسور الجزئية**

يكون لدينا: $\int dx=\int[\frac{\frac{1}{4}}{y-2}-\frac{\frac{1}{4}}{y+2}]\,dy$ **ومنها نحصل على المعادلة:**

$\frac{1}{4}\ln|y-2|-\frac{1}{4}\ln|y+2|=x+c_2$ ،

وبضربها بالعدد 4 تؤول الى : $\ln|y-2|-\ln|y+2|=4x+c_1$ **حيث إنّ** $c_1=4c_2$ **، ومنها**

نحصل على: $\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|=4x+c_1$ **أو** $\frac{y-2}{y+2}=\pm e^{4x+c_1}=ce^{4x}$ **حيث إنّ** $c=\pm e^{c_1}$**.**

إذاً حل المعادلة هو عائلة المنحنيات بمَعْلَمَة واحدة: $y=2\,(\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}})$ **.**

نلاحظ أنّ $y=2$ ينتمي الى عائلة الحلول، أي أنّه أحد الحلول الخاصة حيث يمكن الحصول عليه عندما تكون $c=0$.

لكن $y=-2$ لا ينتمي الى عائلة الحلول ولا يوجد قيمة للثابت c بحيث نحصل على $y=-2$.

إذاً $y=-2$ هو حل منفرد.

إنّ سبب اختيارنا الحلين $y=\pm 2$ يعود الى الطرف الأيمن للمعادلة التفاضلية المعطاة والتي فيها $y=\pm 2$ يحققان صحة المعادلة التفاضلية (تحقق من ذلك).

المثال (6): جد حل مسألة القيمة الابتدائية: $(e^{2y}-y)\cos x\dfrac{dy}{dx}=e^{y}\sin 2x,\ y(0)=0$

الحل: بإجراء عملية القسمة على $(e^{y}\cos x)$ لفصل المتغيرات، نحصل على:

$$\frac{e^{2y}-y}{e^{y}}dy=\frac{\sin 2x}{\cos x}dx$$

وباستخدام القانون: $\sin 2x=2\sin x\cos x$ وتبسيط المعادلة، نحصل على:

$$(e^{y}-ye^{-y})dy=2\sin x\,dx$$

وبإجراء عملية التكامل للطرفين واستخدام التكامل بالاجزاء للطرف الايسر نحصل على:

$$e^{y}+ye^{-y}+e^{-y}=-2\cos x+c$$

وتمثل عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة للمعادلة التفاضلية. وبالتعويض بالشرط الابتدائي $y(0)=0$ ، نحصل على $c=4$. إذاً الحل الخاص هو:

$$.e^{y}+ye^{-y}+e^{-y}=-2\cos x+4$$

2.2 المعادلات المتجانسة (Homogenous differential equations)

قبل البدء بالتعرف على المعادلات المتجانسة، دعنا نعرف الدالة المتجانسة. هنا اصطلاح التجانس يختلف عن ذلك الذي استخدم في الفصل الأول البند (1.4.4).

التعريف (2.2): يقال للدالة $f(x,y)$ متجانسة من الدرجة m ، حيث m عدد حقيقي، إذا وفقط إذا حققت الشرط الآتي: $f(tx,ty)=t^{m}f(x,y)$

المثال (1):

الدالة: $f(x,y)=x+y$ **متجانسة ودرجة التجانس هي 1، لإنّ:**

$$f(tx,ty)=tx+ty=t(x+y)=tf(x,y)$$

المثال (2):

الدالة: $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ **متجانسة ودرجة التجانس هي** $\frac{1}{2}$**، لإنّ:**

$$f(tx,ty)=\sqrt{tx}+\sqrt{ty}=t^{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=t^{\frac{1}{2}}f(x,y)$$

المثال (3):

الدالة: $f(x,y)=xy+y$ **غير متجانسة، لإنّ:**

$$f(tx,ty)=(tx)(ty)+ty=t^2xy+ty\neq t^m(xy+y)=t^m f(x,y)$$

لإي عدد m **.**

المثال (4):

الدالة: $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ **متجانسة ودرجة التجانس هي 0، لإنّ:**

$$f(tx,ty)=\frac{tx+ty}{tx-ty}=\frac{t(x+y)}{t(x-y)}=\frac{x+y}{x-y}=f(x,y)$$

التعريف (2.3): يقال للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ذات الصيغة:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad \textbf{(2.3)}$$

بإنّها متجانسة إذا وفقط إذا كان كل من المعاملين $M(x,y)$ **و** $N(x,y)$ **متجانساً ولهما درجة التجانس نفسه.**

إذا كانت المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ذات الصيغة (2.3) متجانسة ودرجة تجانسها m**، فعندئذٍ هنالك طريقتان لإيجاد حلها:**

1. الطريقة الأولى: نفرض أنّ $y=ux$ **، ومنها نحصل على** $dy=udx+xdu$

وبالتعويض في المعادلة (2.3) نحصل على:

$$M(x,ux)dx + N(x,ux)(udx + xdu) = 0$$

وبما أنّ المعاملين متجانسان من الدرجة m. فعندئذٍ نحصل على:

$$x^m M(1,u)dx + x^m N(1,u)(udx + xdu) = 0$$

وبالقسمة على x^m وإجراء تبسيط نحصل على:

$$[M(1,u) + uN(1,u)]\,dx + xN(1,u)du = 0$$

وهي عبارة عن معادلة من الرتبة الأولى، يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات التي تناولناها في البند الأول، أي أنّ المعادلة تصبح:

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)du}{M(1,u) + uN(1,u)} = 0$$

2. الطريقة الثانية: نفرض أنّ $x = vy$ ، ومنها نحصل على $dx = vdy + ydv$

وبالتعويض في المعادلة (2.3) والتبسيط واتباع الخطوات في الطريقة السابقة نحصل على معادلة من الرتبة الأولى، يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات.

هنا يمكن توجيه السؤال الآتي: متى يمكننا استخدام الطريقة الأولى ومتى نستخدم الطريقة الثانية؟ وهل يمكن استخدام الطريقتين للحصول على النتيجة نفسها؟ الجواب الشافي يستنتج بعد تناول الأمثلة، مع هذا يمكن القول إنّ الفرضية الصائبة تؤدي الى تبسيط المعادلة والحصول على الحل، والفرضية الخاطئة تعقد المسألة ولا يمكن الحصول على الحل. كما سنلاحظ أنّ بعض الأمثلة يمكن فيهما استخدام كلتا الفرضيتين والحصول على النتيجة نفسها.

المثال (5): حل المعادلة التفاضلية الآتية $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

الحل: من الواضح أنّ المعاملين: $M(x,y) = (x^2 + y^2)$ و $N(x,y) = x^2 - xy$ متجانسان وأنّ درجة التجانس هي 2. نفرض أنّ $y = ux$ ، ومنها نحصل على $dy = udx + xdu$ ، وبالتعويض في المعادلة نحصل على:

$$(x^2 + x^2u^2)dx + (x^2 - xux)(udx + xdu) = 0$$

وبالتبسيط نحصل على: $x^2(1+u)dx + x^2(1-u)du = 0$ وبالقسمة على x^2 وإجراء تبسيط نحصل على معادلة تفاضلية يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات: $\frac{1-u}{1+u}du + \frac{dx}{x} = 0$ ، وبإجراء عملية القسمة الطويلة أو التحليل نحصل على:

$(-1+\frac{2}{1+u})du+\frac{dx}{x}=0$ وبإجراء عملية التكامل نحصل على:

$$-u+2\ln|1+u|+\ln|x|=\ln|c|$$

وبالتعويض عن $u=\frac{y}{x}$ في المعادلة السابقة، نحصل على:

$$-\frac{y}{x}+2\ln\left|1+\frac{y}{x}\right|+\ln|x|=\ln|c|$$

وباستخدام خصائص الدالة اللوغاريتمية، نحصل على: $\frac{y}{x}=\ln\left|\frac{(x+y)^2}{cx}\right|$ ، أي أنّ الحل هو:

$$(x+y)^2=cxe^{\frac{y}{x}}.$$

أعد حل السؤال باستخدام الفرضية الثانية $x=vy$ ، ثم قارن بين الحلين.

المثال (6): حل المعادلة التفاضلية الآتية $-ydx+(x+\sqrt{xy})dy=0$

الحل: من الواضح أنّ المعاملين: $M(x,y)=-y$ و $N(x,y)=x+\sqrt{xy}$ متجانسان وأنّ درجة التجانس هي 1. نفرض أنّ $x=vy$ ، ومنها نحصل على $dx=vdy+ydv$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على: $-y(vdy+ydv)+(vy+\sqrt{(vy)y})dy=0$

وبالاختصارنحصل على: $-vdy-ydv+(v+\sqrt{v})dy=0$ ومنها نحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى، يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات: $\frac{dy}{y}=\frac{dv}{\sqrt{v}}$ وبإجراء عملية التكامل نحصل على: $\ln|y|+\ln|c|=2\sqrt{v}$ ، وبالتعويض عن $v=\frac{x}{y}$ في المعادلة السابقة واستخدام خواص اللوغاريتمات، نحصل على: $\ln|cy|=2\left(\frac{x}{y}\right)^{1/2}$.

أي أنّ الحل هو: $cy=e^{2\sqrt{\frac{x}{y}}}$.

ملاحظة: لقد استخدمنا في هذا المثال الفرضية الثانية $x=vy$ فحصلنا على أربعة حدود وبعد الاختصار أصبحت حدين اثنين. في حين لو استخدمنا الفرضية الأولى $y=ux$ لحصلنا على خمسة حدود، مما يشير الى أنّ الفرضية الثانية هي الصحيحة (جرب الفرضية الأولى).

المثال (7): حل العادلة التفاضلية الاتية: $(y+x\cot\frac{y}{x})dx-xdy=0$

الحل: من الواضح أنّ المعاملين: $M(x,y)=(y+x\cot\frac{y}{x})$ و $N(x,y)=-x$ متجانسان وأنّ درجة التجانس هي 1. نفرض أنّ $y=ux$، ومنها نحصل على $dy=udx+xdu$ وبالتعويض في المعادلة نحصل على:

$$(ux+x\cot u)dx-x(udx+xdu)=0$$

وبالقسمة على x وإجراء الاختصار، نحصل على: $\frac{dx}{x}=\frac{du}{\cot u}$ ، أي أنّ $\tan u\, du=\frac{dx}{x}$، وبإجراء عملية التكامل نحصل على: $-\ln|\cos u|=\ln|x|+\ln|c|$، وباستخدام خواص اللوغاريتمات، والتعويض عن u بما يساويها، نجد أنّ الحل هو:

$$\sec\frac{y}{x}=cx.$$

ملاحظات:

(أ) نلاحظ في الأمثلة الثلاثة السابقة استخدمنا الصيغة $\ln|c|$ لثابت التكامل، فهي لتسهيل المعادلة وليست قاعدة عامة.

(ب) في المثال (7) يمكن استخدام الفرضية الثانية $x=vy$ ولكن الحل يصبح أصعب مقارنة بالحل السابق.

(ت) عادة نلجأ الى حل المعادلة المتجانسة بالطريقة السابقة بعد التأكد من أنّ المعادلة هي ليست فصل متغيرات. لأنه من المحتمل أن تكون المعادلة فصل متغيرات ومتجانسة في الوقت نفسه، في هذه الحالة نفضل حل المعادلة بطريقة فصل المتغيرات.

المثال (8): حل مسألة القيمة الابتدائية: $(x+ye^{\frac{y}{x}})dx-xe^{\frac{y}{x}}dy=0,\quad y(1)=0$

الحل: من الواضح أنّ المعاملين متجانسان وأنّ درجة التجانس هي **1** (أختبر ذلك). نفرض أنّ $y = ux$ ، ومنها نحصل على $dy = udx + xdu$ ، بالتعويض في المعادلة بعد قسمة طرفي المعادلة على x ، نحصل على: $(1+ue^u)dx - e^u(udx + xdu) = 0,$. بعد إجراء التبسيط نحصل على معادلة يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات: $\frac{dx}{x} = e^u du$ ، وبإجراء عملية التكامل والتعويض عن u بما يساويها، نحصل على الحل العام: $\ln|x| + c = e^{\frac{y}{x}}$.

إنّ هذا الحل يمثل عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة، وبعد التعويض بالشرط الابتدائي $y(1) = 0$ نحصل على قيمة الثابت: $c = 1$. عندئذٍ يكون حل مسألة القيمة الابتدائية هو:

$$\ln|x| + 1 = e^{\frac{y}{x}}$$

2.3 المعادلات التامة (Exact equations)

قبل البدء باعطاء التعريفات والطريقة، نود الاشارة هنا الى أنه اذا لم تكن المعادلة من نوع فصل المتغيرات وليست متجانسة، فعندئذٍ نجري اختبار كون المعادلة تامة أم لا ونطبق الطريقة التي هي محور نقاشنا في هذا البند. هنا لا بد أن نؤكد على الطالب إتقان الاشتقاق الجزئي لدالة بمتغيرين وإجراء المفاضل (Differential) والأساسيات المرافقة لها. سنبدأ باعطاء المثال الآتي الذي من خلاله نولد تصوراً بسيطاً عن نوع المعادلة والطريقة التي سنستخدمها:

المثال (1): استنتج حل المعادلة التفاضلية: $xdy + ydx = 0$

الحل: بسهولة نلاحظ أنّ الحل هو: $xy = c$ ، حيث إنّ c ثابت اختياري، لإنّ مفاضل الحل هو: $d(xy) = xdy + ydx = dc = 0$. أي استخدمنا القاعدة الآتية: إذا كان الحل من نمط دالة بمتغيرين $f(x,y) = z$ فإنّ المعادلة التفاضلية التي تقابل الحل هي:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = dz \qquad \textbf{(2.4)}$$

كحالة خاصة: إذا كان $f(x,y) = c$ فإنّ $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$.

في المثال السابق الدالة هي: $f(x,y) = xy$ وإنّ $z = c$. اختبر ذلك؟

المثال (2): جد المعادلة التفاضلية التي تقابل الحل: $x^2 - 5xy + y^3 = c$

الحل: بإجراء المفاضل على الحل وتطبيق المعادلة (2.4)، نحصل على المعادلة التفاضلية:

$$(2x-5y)dx+(-5x+3y^2)dy=0.$$

التعريف (2.4): (المعادلة التامة)

يقال إنّ العبارة التفاضلية: $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ **تامة في منطقة** D **من المستوى-** xy

إذا وجدت دالة $f(x,y)$ **معرفة على** D **، بحيث:**

$$df(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

ويقال للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad \textbf{(2.5)}$$

بأنّها تامة اذا كان الطرف الأيسر من المعادلة (2.5) هي عبارة تفاضلية تامة مقابلة للدالة $f(x,y)$ **.**

ويكون حلها عندئذٍ: $f(x,y)=c$ **، حيث إنّ** c **ثابت.**

المثال (3): تحقق من كون المعادلة التفاضلية $x^2y^3dx+x^3y^2dy=0$ **تامة، ثم جد حلها إن كانت تامة:**

الحل: نعم هي تامة لإنّ الطرف الأيسر من المعادلة يحقق: $d(\frac{1}{3}x^3y^3)=x^2y^3dx+x^3y^2dy.$

أي أنّها عبارة تفاضلية تامة، وتقابلها الدالة: $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3y^3$ **، ويكون حل المعادلة التفاضلية في هذه الحالة:** $\frac{1}{3}x^3y^3=c$ **.**

ملاحظة: إذا أجرينا مقارنة بين المعادلة التفاضلية في المثال (3) والمعادلة (2.5)، نجد أنّ:

$M(x,y)=x^2y^3$ **وإنّ** $N(x,y)=x^3y^2$ **، ومنها نجد إنّ:** $\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2y^2=\frac{\partial N}{\partial x}$

الآن سنعطي اختباراً من خلاله نميز المعادلة التفاضلية التامة من غير التامة.

المبرهنة (2.1): ليكن $M(x,y)$ و $N(x,y)$ دالتين متصلتين ولهما مشتقات جزئية متصلة على المنطقة $D=\{(x,y): a<x<b,\ c<y<d\}$.
عندئذٍ تكون العبارة التفاضلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ تامة إذذا تحقق الشرط الآتي:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad \textbf{(2.6)}$$

البرهان: نفرض أنّ الدالتين $M(x,y)$ و $N(x,y)$ متصلتان ولهما مشتقات جزئية متصلة بالنسبة الى x و y. سنكتفي باثبات الجزء الأول (الشرط اللازم)، ونترك الجزء الثاني بوصفه تمريناً للقارىء.

إذا كانت العبارة التفاضلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ تامة، عندئذٍ لكل x في D توجد دالة f تحقق: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ ، أي أنّ $M(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}$ و $N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}$ ، وبإجراء الاشتقاق الجزئي نحصل على:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

إنّ كون الدالتين $M(x,y)$ و $N(x,y)$ متصلتين ولهما مشتقات جزئية متصلة يضمن لنا استخدام إحدى خصائص الاشتقاق الجزئي وهي: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

طريقة حل المعادلة التامة:

نتبع الخطوات الآتية في حل المعادلة التفاضلية التامة (2.5):

1. **نحدد كلاً من الدالتين: $M(x,y)$ و $N(x,y)$**
2. **نختبر المعادلة التفاضلية تامة أم لا بتطبيق القاعدة (2.6)، في حالة كون المعادلة تامة نستمر**
3. **نستخدم الصيغة الأولى: $M(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}$ أو الصيغة الثانية: $N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}$ ، وبإجراء عملية التكامل و إضافة ثابت التكامل نجد أنّ:**

$$f(x,y)=\int M dx+\phi(y) \quad \text{أو} \quad f(x,y)=\int N dy+\varphi(x) \qquad \textbf{(2.7)}$$

حيث إنّ $\phi(y)$ ثابت بالنسبة الى x ومتغير بالنسبة الى y، وإنّ $\varphi(x)$ ثابت بالنسبة الى y ومتغير بالنسبة الى x

4. نشتق الصيغة الأولى بالنسبة الى y أو الصيغة الثانية بالنسبة الى x، نحصل على:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int Ndy+\varphi'(x)=M(x,y) \quad \text{أو} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx+\phi'(y)=N(x,y)$$

أي أنّ : $\phi'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx$ أو $\varphi'(x)=M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}\int Ndy$

5. وبإجراء عملية التكامل، نحصل على ثابت التكامل: $\phi(y)$ أو $\varphi(x)$

6. ثم نعوض عن $\phi(y)$ أو $\varphi(x)$ بما يساويهما في المعادلة (2.7) نحصل على الحل.

المثال (4): جد عائلة حلول المعادلة التفاضلية: $2xydx+(x^2-1)dy=0$ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل: من الواضح أنّ: $M(x,y)=2xy$ و $N(x,y)=x^2-1$ ، ومنها نحصل على:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x=\frac{\partial N}{\partial x}$$

أي أنّ المعادلة تامة. الشرط الكافي للمبرهنة (2.1) يضمن وجود دالة $f(x,y)$ تحقق:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2-1$$

من الصيغة الأولى، وبإجراء عملية التكامل، نحصل على:

$$f(x,y)=\int 2xydx+\phi(y)=x^2y+\phi(y)$$

وبإجراء المشتقة الجزئية بالنسبة الى y، نحصل على:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+\phi'(y)=N(x,y)=x^2-1$$

أي : $x^2+\phi'(y)=x^2-1$ ومنها نحصل على -1، $\phi'(y)=-1$ وبالتالي $\phi(y)=-y$.

إذاً الحل هو: $f(x,y)=x^2y-y=c$. ومنه نحصل على الحل الصريح:

$$y=\frac{c}{x^2-1}.$$

التحقيق: بتطبيق المعادلة (2.4) على الحل: $x^2y-y=c$ ، نحصل على المعادلة التفاضلية (اختبر ذلك).

المثال (5): جد حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$(2x^3y-5y^4)\frac{dy}{dx}=-3x^2y^2-1\ ,\ y(1)=2$$

الحل: من الواضح أنّ: $M(x,y)=3x^2y^2+1$ و $N(x,y)=2x^3y-5y^4$ ، ومنها نحصل على:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6x^2y=\frac{\partial N}{\partial x}$$

أي أنّ المعادلة تامة، فتوجد دالة $f(x,y)$ تحقق:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^2+1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2x^3y-5y^4$$

من الصيغة الأولى، وبإجراء عملية التكامل، نحصل على:

$$f(x,y)=\int(3x^2y^2+1)dx+\phi(y)=x^3y^2+x+\phi(y)$$

وبإجراء المشتقة الجزئية بالنسبة الى y ، نحصل على:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^3y+\phi'(y)=N(x,y)=2x^3y-5y^4$$

أي أنّ : $\phi'(y)=-5y^4$ فعليه $\phi(y)=-y^5$. إذاً $f(x,y)=x^3y^2+x-y^5$

وبذلك يكون الحل العام هو: $x^3y^2+x-y^5=c$. وبالتعويض بالشرط الابتدائي $y(1)=2$ نحصل على $c=-27$. وعليه إنّ الحل الخاص هو:

$$x^3y^2+x-y^5=-27 \text{ .}$$

ملاحظة: لاحظنا في المثال (4) إنّ $\phi'(y)=-1$ وفي المثال (5) إنّ $\phi'(y)=-5y^4$. أي أنّ $\phi(y)$ دالة لا تحتوي على x ، أي تحتوي على y فقط أو تكون دالة ثابتة. وكذلك $\varphi(x)$ يجب أن لا تحتوي على y ، أي تحتوي على x فقط أو تكون دالة ثابتة.

المثال (6): جد حل المعادلة التفاضلية:

$$(e^{2y}-y\cos xy)dx+(2xe^{2y}-x\cos xy+2y)dy=0$$

الحل: من الواضح أنّ:

$$M(x,y)=e^{2y}-y\cos xy \quad \text{و} \quad N(x,y)=2xe^{2y}-x\cos xy+2y \text{ ،}$$

ومنها نحصل على: $\dfrac{\partial N}{\partial x}=2e^{2y}+xy\sin xy-\cos xy=\dfrac{\partial M}{\partial y}$ **، أي أنّ المعادلة تامة. عندئذٍ توجد دالة** $f(x,y)$ **تحقق:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{2y}-y\cos xy \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2xe^{2y}-x\cos xy+2y$$

من الصيغة الثانية، وبإجراء عملية التكامل، نحصل على:

$$f(x,y)=\int(2xe^{2y}-x\cos xy+2y)dy+\varphi(x)$$
$$=xe^{2y}-\sin xy+y^2+\varphi(x)$$

وبإجراء المشتقة الجزئية بالنسبة الى x **، نحصل على:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{2y}-y\cos xy+\varphi'(x)=M(x,y)=e^{2y}-y\cos xy$$

أي أنّ : $\varphi'(x)=0$ **فعليه** $\varphi(x)=c$ **. إذاً عائلة الحلول بمتغير واحد هي:**

$$xe^{2y}-\sin xy+y^2=c \, .$$

<u>طريقة مختصرة لحل المعادلات التفاضلية التامة</u>

نود الإشارة إلى وجود أسلوب مختصر مبني على طريقة حل المعادلة التامة الآنفة الذكر و هو كالآتي:

لتكن المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ **تامة. فإن عائلة حلولها هي :**

$I_1+I_2=c$ **، حيث يتم إجراء التكامل** $I_1=\int M(x,y)dx$ **بإعتبار** y **ثابتاً بالنسبة للمتغير** x **،**

وإجراء التكامل $I_2=\int N(x,y)dy$ **بإهمال كل حد يحوي المتغير** x **، أو بالعكس.**

نعيد حل المثال السابق بالطريقة المختصرة و نترك الأمثلة الأخرى ليعيد الطالب حلها.

حل المثال (6) بالطريقة المختصرة:

لدينا المعادلة التفاضلية التامة

$$(e^{2y}-y\cos xy)dx+(2xe^{2y}-x\cos xy+2y)dy=0$$

باعتبار y ثابتاً بالنسبة للمتغير x نحسب

$$I_1=\int M(x,y)dx=\int (e^{2y}-y\cos xy)dx=xe^{2y}-\sin xy$$

و بإهمال كل حد يحوي المتغير x نحسب

$$I_2=\int N(x,y)dy=\int 2ydy=y^2$$

ومنها نحصل على عائلة الحلول $I_1+I_2=c$ ، أي $xe^{2y}-\sin xy+y^2=c$.

قبل إختتام هذا البند نثير التسائل الآتي:

إذا لم تكن المعادلة تامة، هل بالامكان تحويلها الى معادلة تامة؟ هذا ما سنحاول القيام به في المثال القادم.

المثال (7): حل المعادلة التفاضلية: $(1-\dfrac{y}{x})dx-dy=0$

الحل: من الواضح أنّ المعادلة التفاضلية بوضعها الحالي ليست تامة، لإنّ:

$M(x,y)=1-\dfrac{y}{x}$ و $N(x,y)=-1$ ، وإنّ $\dfrac{\partial M}{\partial y}=-\dfrac{1}{x}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}=0$

لكن إذا ضربنا طرفي المعادلة بالمتغير x ، فإنّ المعادلة تصبح: $(x-y)dx-xdy=0$

وهي معادلة تامة (تحقق من ذلك).

السؤال الآن ، هل بالامكان تحويل كل معادلة تفاضلية غير تامة الى معادلة تامة من خلال ضربها بدالة معينة؟ في الحقيقة، أحياناً يمكن تحويل المعادلة غير التامة الى معادلة تامة وفي احيانٍ اخرى لا يمكن . هذا ما سنحاول القيام به في البند القادم. تسمى هذه الدالة بـ "عامل المكامل" (Integrating factor) ويرمز لها بـ $\mu(x)$ إذا كانت تعتمد على x فقط أو بـ $\mu(y)$ إذا كانت تعتمد على y فقط .

2.4 المعادلات الخطية (Linear equations)

تأمل المعادلة الخطية غير المتجانسة من الرتبة الأولى، والتي سبق ان تناولناها في البند (1.4.3) ذات الصيغة:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x) \qquad (2.8)$$

حيث إنّ كلاً من $p(x)\neq 0$ و $f(x)$ دالة تعتمد على المتغير المستقل x. إذا كانت $p(x)=0$ فإنّ المعادلة (2.8) تصبح معادلة فصل متغيرات سبق أن تناولناها بالتفصيل في البند (2.1). سنناقش حل المعادلة الخطية في حالة كونها متجانسة ثم في حالة كونها غير متجانسة.

2.4.1 المعادلات الخطية المتجانسة (Homogenous linear equations)

إذا كانت الدالة $f(x)=0$ في المعادلة (2.8) فعندئذٍ تدعى معادلة خطية متجانسة، وصيغتها:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \qquad (2.9)$$

ويمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات، كما يأتي:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$$

وبإجراء عملية التكامل، نحصل على: $\ln|y|=-\int p(x)dx+c_1$. وباستخدام خواص اللوغاريتمات والتبسيط، نحصل على الحل:

$$y_c=ce^{-\int p(x)dx} \qquad (2.10)$$

حيث إنّ $c=\pm e^{c_1}$ ثابت اختياري.

المثال (1): حل المعادلة التفاضلية: $\dfrac{dy}{dx}-3y=0$

الحل: بما أنّ المعادلة خطية متجانسة، فحسب المعادلة (2.10) الحل هو:

$$y_c=ce^{-\int -3dx}=ce^{3x}, \qquad -\infty<x<\infty$$

المثال (2): حل المعادلة التفاضلية : $(x^2-9)\dfrac{dy}{dx}+xy=0$

الحل: بما أنّ المعادلة خطية متجانسة فيها $p(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$ ، فحسب المعادلة (2.10) الحل هو:

$$y_c=ce^{-\int\frac{x}{x^2-9}dx}=ce^{-\frac{1}{2}\ln|x^2-9|}=\frac{c}{\sqrt{x^2-9}}, \qquad 3<x \text{ أو } x<-3$$

نلاحظ أنّه عندما $x=-3$ أو $x=3$ ،فإنّ الحل يصبح دالة غير متصلة، تدعى كل من هاتين النقطتين بـ "نقطة منفردة" للمعادلة التفاضلية.

2.4.2 المعادلات الخطية غيرالمتجانسة (Nonhomogeneous linear equations)

إذا كانت الدالة $f(x) \neq 0$ في المعادلة (2.8) فعندئذٍ تدعى معادلة خطية غير متجانسة، وإذا تم إعادة كتابة صيغتها لتصبح:

$$dy + \{p(x)y - f(x)\}dx = 0 \qquad \textbf{(2.11)}$$

فهي غير تامة، لإنّ: $\frac{\partial M}{\partial y} = p(x) \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 0$. الآن نضرب المعادلة (2.11) بعامل المكامل $\mu(x)$ لتصبح تامة، فنحصل على:

$$\mu(x)dy + \mu(x)\{p(x)y - f(x)\}dx = 0$$

وحيث المعادلة السابقة تامة، فإنّ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ، منها نحصل على: $\mu(x)p(x) = \frac{d\mu(x)}{dx}$ ، أي أنّ : $p(x)dx = \frac{d\mu(x)}{\mu(x)}$ ، وبإجراء عملية التكامل واستخدام خواص اللوغاريتمات نحصل على:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \qquad \textbf{(2.12)}$$

الذي يمثل عامل المكامل.

فإذا ضربنا المعادلة غير التامة (2.8) بعامل المكامل، نحصل على:

$$e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + p(x)e^{\int p(x)dx}y = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

أي أنّ :

$$\frac{d}{dx}(e^{\int p(x)dx}y) = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

وبإجراء عملية التكامل نحصل على:

$$e^{\int p(x)dx}y = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$$

ومنها نحصل على الحل العام للمعادلة الخطية غير المتجانسة:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + ce^{-\int p(x)dx} \qquad \textbf{(2.13)}$$

نلاحظ أنّ الحل العام $y = y_c + y_p$ يقسم الى قسمين:

1. القسم الأول: $y_c = ce^{-\int p(x)dx}$ ، ويدعى بـ "الدالة المكملة" أو "الدالة المتممة" (Complementary function)، والذي سبق أن اشتققناه في المعادلة (2.10) وهو حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (2.9)، باعتبار $f(x)$ مساوياً الى الصفر.

2. القسم الثاني: $y_p = e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$ ، ويدعى بـ **"الحل الخاص"** **(Particular solution)**، وهوأحد الحلول الخاصة للمعادلة غير المتجانسة (2.8)، (حقق ذلك).

ملاحظات:

1. هنالك طريقة ثانية للوصول الى الحل العام (2.13) للمعادلة الخطية غير المتجانسة (2.8) تدعى طريقة تغيير (تبديل) المَعْلَمَات (Variation of parameters) وسنستخدمها في الفصل الخامس عند إيجاد حل معادلة من الرتبة الثانية.

2. سنتناول في الفصل الرابع عند دراستنا المعادلات التفاضلية برتب عليا الدالة المكملة والحل الخاص بالتفصيل مع دراسة خواصهم.

المثال (3): حل المعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx} - 3y = 6$

الحل: نجد عامل المكامل $\mu(x) = e^{\int -3dx} = e^{-3x}$ ، ثم نضرب المعادلة بعامل المكامل فنحصل على:

$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 6e^{-3x}$ ، أي أنّ : $\frac{d}{dx}(e^{-3x}y) = 6e^{-3x}$ ، ومنها نحصل على:

$$e^{-3x}y = \int 6e^{-3x}dx + c = -2e^{-3x} + c$$

وبضرب المعادلة ب e^{3x} نحصل على الحل العام: $y = -2 + ce^{3x}, \quad -\infty < x < \infty$

طريقة ثانية للحل: يمكن حل المثال السابق باستخدام المعادلة (2.13) مباشرةً باعتبار أنّ:

$p(x) = -3$ و $f(x) = 6$ وبتطبيق القانون نحصل على الحل:

$$y = e^{-\int -3dx}\int 6e^{\int -3dx}dx + ce^{-\int -3dx} = 6e^{3x}(\frac{e^{-3x}}{-3}) + ce^{3x}$$

$$= -2 + ce^{3x}, \quad -\infty < x < \infty$$

الدالة المكملة هي: $y_c = ce^{3x}$ ، ومن خواصها أنها تحتوي على الثابت c وتحقق صحة القسم المتجانس من المعادلة التفاضلية، أي عندما $f(x) = 0$ ، وإنّ

الحل الخاص هو: $y_p = -2$ لا يحتوي على الثابت c ويحقق صحة المعادلة الأصلية.

المثال (4): حل المعادلة التفاضلية الآتية: $x\frac{dy}{dx} - 3y = x^5e^{-x}$ ، $0 < x < \infty$

الحل: بالقسمة على x نحصل على معادلة خطية من الرتبة الأولى غير متجانسة:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y=x^4e^{-x}$$

و فيها $p(x)=-\frac{3}{x}$ و $f(x)=x^4e^{-x}$ ، متصلان على الفترة $0<x<\infty$.

نحسب عامل المكامل $\mu(x)=e^{\int\frac{-3}{x}dx}=e^{-3\ln x}=x^{-3}$ لكل $0<x$ ، ثم نضرب المعادلة

بعامل المكامل فنحصل على: $x^{-3}\frac{dy}{dx}-3x^{-4}y=xe^{-x}$ أي أنّ : $\frac{d}{dx}(x^{-3}y)=xe^{-x}$

وباستخدام التكامل بالاجزاء نحصل على:

$$x^{-3}y=\int xe^{-x}dx+c=-xe^{-x}-e^{-x}+c$$

وبضرب المعادلة بـ x^3 نحصل على الحل العام:

$$y=-x^4e^{-x}-x^3e^{-x}+cx^3,\quad 0<x<\infty.$$

ملاحظة: نلاحظ هنا أنّ:

الدالة المكملة هي: $y_c=cx^3$ ، **والحل الخاص هو:** $y_p=-x^4e^{-x}-x^3e^{-x}$.

أعد حل المثال باستخدام المعادلة (2.13).

المثال (5): استخدم القانون (2.13) لحل مسألة القيمة الابتدائية الآتية:

$$\frac{dy}{dx}+y=x,\quad y(0)=4$$

الحل: نستخدم القانون (13) لحل المعادلة التفاضلية، باعتبار أنّ: $p(x)=1$ و $f(x)=x$ دالتان

متصلتان على الفترة $(-\infty,\infty)$ **، وبتطبيق القانون نحصل على الحل:**

$$\begin{aligned} y&=e^{-\int dx}\int xe^{\int dx}dx+ce^{-\int dx}=e^{-x}\int xe^{x}dx+ce^{-x}\\ &=e^{-x}(xe^{x}-e^{x})+ce^{-x}=x-1+ce^{-x}\end{aligned}$$

أي أنّ الحل العام للمعادلة هو: $y=x-1+ce^{-x}$ ، $-\infty<x<\infty$.

وبالتعويض بالشرط الابتدائي $y(0)=4$ ، **نحصل على قيمة الثابت** $c=5$

إذاً حل المعادلة هو: $y=x-1+5e^{-x}$ ، $-\infty<x<\infty$.

المثال (6): جد حلاً متصلاً للمعادلة التفاضلية الآتية: $\frac{dy}{dx}+y=f(x),\quad y(0)=0$ ، **حيث إنّ:**

$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0\le x\le 1\\ 0 & , \quad x>1\end{cases}$$

الحل: الدالة f ثنائية التعريف على الفترة $[0,\infty)$ ومتصلة باستثناء النقطة $x=1$. عليه سنقسم المعادلة على قسمين، ونجد حل كل قسم على حدة.

1. نأخذ فترة التعريف $0\le x\le 1$ ، عندئذٍ تصبح المعادلة: $\frac{dy}{dx}+y=1,\quad y(0)=0$ ، وهي عبارة عن مسألة القيمة الابتدائية (IVP) ، حلها هو $y=1+c_1e^{-x}$. استخدم المعادلة (2.13) لإيجاده ، وبالتعويض بالشرط الابتدائي $y(0)=0$ نحصل على $c_1=-1$ ويكون الحل هو: $y=1-e^{-x}$.

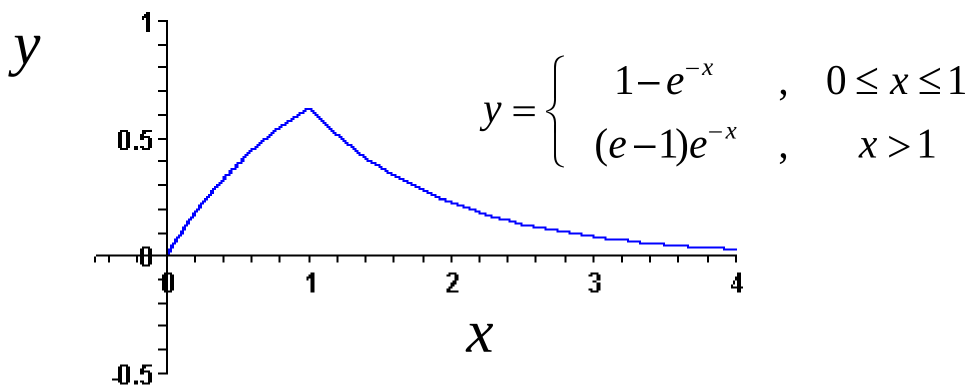
2. نأخذ فترة التعريف $x>1$، عندئذٍ تصبح المعادلة $\frac{dy}{dx}+y=0$ وحلها هو $y=c_2e^{-x}$.

إذاً دالة الحل هي:
$$y=\begin{cases}1-e^{-x} & , \quad 0\le x\le 1\\ c_2e^{-x} & , \quad x>1\end{cases}$$

الآن من اجل اتصال الحل نفرض أنّ:
$$\lim_{x\to 1^+} y(x)=y(1)=1-e^{-1}$$

أي أنّ : $c_2e^{-1}=1-e^{-1}$ ومنها نحصل على $c_2=e-1$. إذاً الحل هو:
$$y=\begin{cases}1-e^{-x} & , \quad 0\le x\le 1\\ (e-1)e^{-x} & , \quad x>1\end{cases}$$

ثنائي التعريف متصل على الفترة $[0,\infty)$ ، وهو لا يمكن اعتباره حلاً لمسألة القيمة الابتدائية في هذا المثال على الفترة $[0,\infty)$ لإنّ الشرط الابتدائي $y(0)=0$ لا يحقق القسم الثاني من دالة الحل، كما هو مبين في الشكل (2.1):



الشكل (2.1)

المثال (7): حل مسألة القيمة الابتدائية: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y^2}\,,\ y(0)=0$

الحل: من الواضح أنّ المعادلة التفاضلية هي غير خطية بالنسبة للمتغير y **ولكن هي خطية بالنسبة للمتغير المعتمد** x **واعتبار المتغير المستقل** y**. أي يمكن إعادة كتابة المعادلة بالصيغةّ:**

$\frac{dx}{dy}-x=y^2$ **. نحسب عامل المكامل** $\mu(y)=e^{-y}$ **ومنه نحصل على:**

$e^{-y}\frac{dx}{dy}-xe^{-y}=y^2e^{-y}$ ، **أي أنّ الحل العام هو:** $x=-y^2-2y-2+ce^y$ ،

وبالتعويض بالشرط الابتدائي $y(0)=0$ **نحصل على الثابت** $c=2$**. فيكون الحل الخاص:**

$x=-y^2-2y-2+2e^y$**.**

الآن سنتناول معادلات تفاضلية من نمط خاص، معادلات قابلة للتحويل الى معادلات خطية، مع طرائق حلها.

2.5 معادلة برنولي (Bernoulli's equation)

تامل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n \qquad (2.14)$$

حيث إنّ n **عدد حقيقي وإنّ** $n\neq 0,1$**. تدعى المعادلة (2.14) بـ "معادلة برنولي" .**

1. **عندما** $n=0$ ، **إنّ المعادلة (2.14) تصبح معادلة خطية من الرتبة 1 سبق أن تم مناقشتها في البند (1.4.3) المعادلة (1.6) ووجد حلها في البند (2.4.1) .**
2. **عندما** $n=1$ ، **إنّ المعادلة (2.14) تصبح:**

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y \qquad (2.15)$$

وبعد نقل الحد في الطرف الأيمن الى الجانب الآخر، والتعويض نحصل على

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0 \qquad \textbf{(2.16)}$$

حيث إنّ $g(x) = p(x) - f(x)$.

المعادلة (2.16) هي خطية متجانسة من الرتبة الأولى سبق أن تناولناها في البند (2.4.2) وناقشنا حلها بشكل مفصل. لهذا السبب فرضنا $n \neq 0,1$ لإنّها ستؤدي الى معادلات تفاضلية خطية سبق مناقشتها.

طريقة الحل: نتبع الخطوات الآتية لحل معادلة برنولي **(2.14):**

1. **نقسم المعادلة (2.14) على y^n فنحصل على:**

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = f(x) \qquad \textbf{(2.17)}$$

2. **نفرض أنّ $y^{1-n} = w$ وبإجراء المشتقة نحصل على:** $(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dw}{dx}$

3. **نعوض الفرضية السابقة ومشتقتها في المعادلة (2.17)، نحصل على:**

$$\frac{1}{1-n}\ \frac{dw}{dx} + p(x)w = f(x),$$

ومنها نحصل على:

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)\,p(x)w = (1-n)\,f(x) \qquad \textbf{(2.18)}$$

وهي معادلة خطية بالمتغير المعتمد w، غير متجانسة من الرتبة الأولى عندما $f(x) \neq 0$. نذكر هنا أنّ $n \neq 1$.

4. **نحل المعادلة الخطية غير المتجانسة (2.18)، ونحصل على الحل w .**
5. **نعوض الفرضية $y^{1-n} = w$ في الحل، ونحصل على الحل العام y .**

المثال (1): حل المعادلة التفاضلية الآتية : $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^2y^2$

الحل: نقسم على x فنحصل على: $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = x\ y^2$ **، وهي معادلة برنولية فيها $n = 2$. نقسم على y^2 ، فنحصل على:** $y^{-2}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y^{-1} = x$ **. نفرض أنّ $y^{-1} = w$ ونشتق بالنسبة الى**

x فنحصل على: $-y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dw}{dx}$. الآن نعوض الفرضية ومشتقتها في المعادلة السابقة، نحصل على: $\frac{dw}{dx}-\frac{1}{x}w=-x$ وهي عبارة عن معادلة خطية من الرتبة الأولى حلها هو: $w=-x^2+cx$. أي أنّ الحل هو:

$$y=\frac{1}{cx-x^2}$$

المثال (2): حل المعادلة التفاضلية: $3(1+t^2)\frac{dy}{dt}=2ty(y^3-1)$ (1)

الحل: يبدو من النظرة الأولى الى المعادلة التفاضلية أنه يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات، وهذا ممكن فعلاً. لكن إذا تبنينا طريقة فصل المتغيرات فسنجد أنه من خلال الحل سنحتاج الى طرائق تكامل متعددة، وعندئذٍ تكون طريقة الحل أصعب من الطريقة التي سنستخدمها الآن (حاول ذلك). لو أجرينا تبسيطاً للمعادلة نحصل على:

$$\frac{dy}{dt}+\frac{2t}{3(1+t^2)}y=\frac{2t}{3(1+t^2)}y^4$$

وهذه معادلة برنولية فيها $n=4$ **. نقسم طرفي المعادلة على** y^4 **، نحصل على:**

$$y^{-4}\frac{dy}{dt}+\frac{2t}{3(1+t^2)}y^{-3}=\frac{2t}{3(1+t^2)}$$

نفرض أنّ $y^{-3}=w$ **، بإجراء المشتقة بالنسبة الى** t **نحصل على** $-3y^{-4}\frac{dy}{dt}=\frac{dw}{dt}$

وبالتعويض في المعادلة السابقة والتبسيط،، نحصل على:

$$\frac{dw}{dt}-\frac{2t}{(1+t^2)}w=\frac{-2t}{(1+t^2)}$$

وهي معادلة خطية من الرتبة الأولى فيها $p(t)=f(t)=\frac{-2t}{(1+t^2)}$

نحسب عامل المكامل: $\mu(t)=e^{-\int\frac{2t}{1+t^2}dt}=e^{-\ln(1+t^2)}=\frac{1}{1+t^2}$

نضرب طرفي المعادلة بعامل المكامل، فنحصل على:

$$\frac{1}{(1+t^2)}\frac{dw}{dt}-\frac{2t}{(1+t^2)^2}w=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}$$

ومنها نحصل على: $\frac{d}{dt}(\frac{1}{(1+t^2)}w)=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}$ **وبتكامل الطرفين نحصل على:**

$$\frac{1}{(1+t^2)}w=\int\frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt+c$$

وبإجراء عملية التكامل والتبسيط نحصل على: $w=1+c(1+t^2)$ **. إذاً الحل العام هو:**

$$y^{-3}=1+c(1+t^2)$$

2.6 معادلة ريكاتي (Riccati's equation)

تدعى المعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx}=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2$ **بمعادلة ريكاتي.**

وطريقة حلها باستخدام تعويضين متعاقبين شريطة أن يكون لدينا حل خاص معلوم y_1 **. التعويض الأول هو** $y=y_1+u$ **، والثاني يتم تحديده على ضوء نتائج التعويض الأول.**

ملاحظات:

1. إذا كان $R(x)=0$ **، فإنّ معادلة ريكاتي تصبح معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى.**

2. إذا كان $P(x)=0$ **، فإنّ معادلة ريكاتي تصبح معادلة برنولية.**

المثال (1): جد حل المعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}y+y^2$ ، علماً أنّ $y_1=\frac{2}{x}$ هو حل خاص معلوم لها.

الحل: المعادلة من نوع ريكاتي فيها $P(x)=-\frac{4}{x^2},\quad Q(x)=-\frac{1}{x},\quad R(x)=1$

نفرض أنّ الحل هو $y=\frac{2}{x}+u$ **، عندئذٍ يكون** $\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{x^2}+\frac{du}{dx}$

وبالتعويض عن الفرضية ومشتقتها في المعادلة نحصل على:

$$-\frac{2}{x^2}+\frac{du}{dx}=-\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}(\frac{2}{x}+u)+(\frac{2}{x}+u)^2$$
$$=-\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^2}-\frac{u}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{4u}{x}+u^2$$

وبحذف الحدود والتبسيط نحصل على: $\frac{du}{dx}=\frac{3u}{x}+u^2$ ، وهذه معادلة برنولية فيها $n=2$ ، لإنّ:

$\frac{du}{dx}-\frac{3}{x}u=u^2$ ، وإنّ حلها هو: $u=\frac{4x^3}{c-x^4}$ ، ومنها نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية: $y=\frac{2}{x}+u=\frac{2}{x}+\frac{4x^3}{c-x^4}=\frac{2(c+x^4)}{x(c-x^4)}$ **.**

الآن سنعطي تمهيداً بدون برهان من خلاله نجد أنه يمكن تحويل معادلة ريكاتي الى معادلة خطية من الرتبة الأولى:

> **التمهيد (2.1): إذا كان $y=f(x)$ حلاً لمعادلة ريكاتي:**
>
> $\frac{dy}{dx}=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2$ **فإنّ** $y=f(x)-\frac{1}{g(x)}$ **هو حل آخر لمعادلة ريكاتي، حيث**
>
> **إنّ** $y=g(x)$ **هو حل للمعادلة التفاضلية الخطية:** $\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x)$ **.**

2.7 معادلة كليريت (Clairaut's equation)

هي معادلة من النوع:

$$y=xy'+f(y') \qquad \textbf{(2.19)}$$

وإنّ حلها هو عائلة المستقيمات بمَعْلَمَة واحدة: $y=cx+f(c)$ **حيث إنّ المَعْلَمَة** c **هو ثابت اختياري. لإنّ مشتقة الحل هي** $y'=c$ **تحقق صحة المعادلة التفاضلية (2.19).**

> **التمهيد (2.2): المعادلة التفاضلية (2.19) لها حل منفرد بصيغة متغير وسيط** t **هو:**
>
> $$x=-f'(t), \quad y=f(t)-tf'(t) \qquad \textbf{(2.20)}$$

يترك إثبات التمهيد (2.2)، للطالب.

المثال (1): جد حل المعادلة التفاضلية: $y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2$

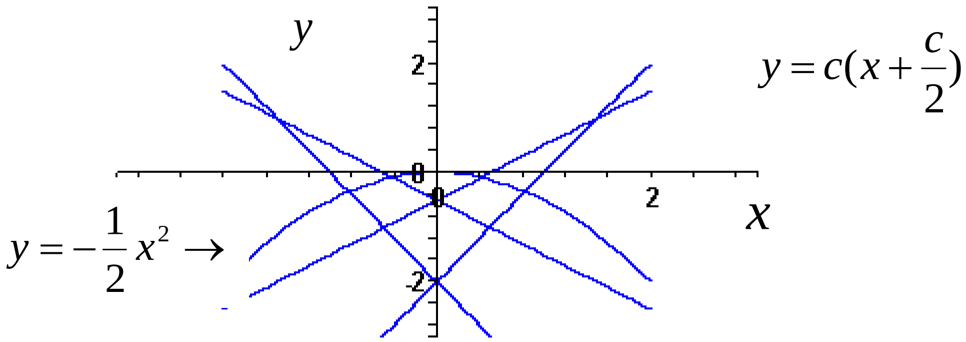
الحل: المعادلة التفاضلية من نوع كليرت فيها: $f(y') = \frac{1}{2}(y')^2$ **وعليه إنّ:** $f(t) = \frac{1}{2}t^2$ **. إذاً**

عائلة الحلول هي: $y = cx + \frac{1}{2}c^2$ **و أنّ** $f'(t) = t$ **، ومنه نحصل على حل منفرد هو:**

$\text{y} = \frac{1}{2}t^2 - t(t) = -\frac{1}{2}t^2$ **،** $x = -t,$ **وبحذف الوسيط** t **يؤول الحل المنفرد الى :**

$\text{y} = -\frac{1}{2}x^2.$

لاحظ أنّ الحل المنفرد ليس فرداً من أفراد عائلة الحلول، كما هو موضح في الشكل (2.2):



الشكل (2.2)

2.8 طرائق التعويض (Methods by substitution)

على الرغم من تناولنا لطرائق متعددة لحل معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى إلا إنّ هذه الطرائق لا تفي بالعديد من هذه المعادلات، علينا البحث عن طرائق إضافية تضيق هذه الفجوة.

في هذا البند سنستخدم التعويض لحل أنماط خاصة من المعادلات التفاضلية، سنشاهد بمجرد تعويض بسيط انتقال المعادلة من مسألة غير قابلة للحل بشكل مباشر الى مسالة قابلة للحل بالطرائق السابقة.

في الحقيقة لا توجد قاعدة عامة للحل لكن نستطيع القول إنّ الطريقة الصحيحة تؤدي الى تبسيط المعادلة ثم حلها.

المثال (1): حل المعادلة التفاضلية الآتية: $\frac{dy}{dx} = (-2x + y)^2 - 7, \quad y(0) = 0$

الحل: نلاحظ أنّ الطرائق السابقة لا تفي بحل المعادلة التفاضلية، لذلك نستخدم طريقة التعويض، نفرض أنّ: $u=-2x+y$، وبإجراء المشتقة بالنسبة الى المتغير x، نجد أنّ $\frac{du}{dx}=-2+\frac{dy}{dx}$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على: $\frac{du}{dx}+2=u^2-7$

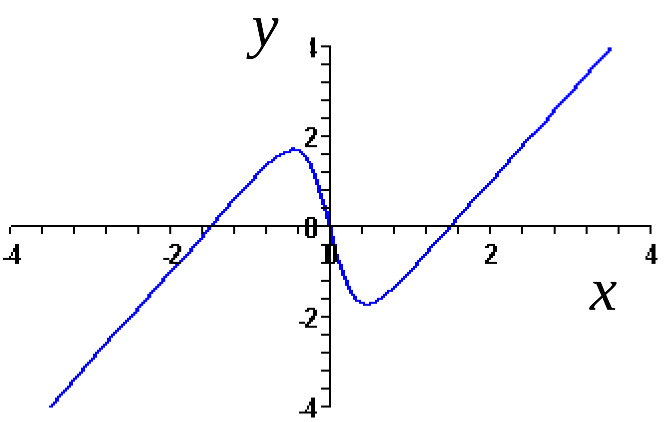
وهي عبارة عن معادلة تفاضلية يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات، أي أنّ : $\frac{du}{u^2-9}=dx$.

بعد إجراء التكامل بالكسور الجزئية ، نحصل على:

$$\frac{1}{6}\int\left[\frac{1}{u-3}-\frac{1}{u+3}\right]du=\int dx$$

ومنه على: $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right|=x+c_1$ و بالتالي $\frac{u-3}{u+3}=e^{6x+6c_1}=ce^{6x}$ ، حيث إنّ $c=e^{6c_1}$ ثابت. وبحل المعادلة السابقة بالنسبة الى u ، نحصل على: $u=\frac{3(1+ce^{6x})}{1-ce^{6x}}$.

أي أنّ الحل العام هو: $y=2x+\frac{3(1+ce^{6x})}{1-ce^{6x}}$ ، وبالتعويض بالشرط الابتدائي $y(0)=0$، نحصل على $c=-1$. إذاً حل مسألة القيمة الابتدائية هو: $y=2x+\frac{3(1-e^{6x})}{1+e^{6x}}$ ، كما هو مبين في الشكل (2.3):



الشكل (2.3)

المثال (2): جد الحل العام للمعادلة التفاضلية: $t\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{d^2x}{dt^2}=t^2,\quad t>0$

الحل: تبدو المعادلة من الرتبة الثالثة، لكن باستخدام التعويض $v=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ **ومنها** $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^3x}{dt^3}$ ،

تصبح المعادلة: $t\dfrac{dv}{dt}-v=t^2,\quad t>0$ **وهي معادلة خطية من الرتبة الأولى يمكن حلها بالطريقة التي استخدمناها في البند (2.4)، فنحصل على:** $v=c_1t+t^2$ **.**

بما أنّ $v=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ **، فإنّ المعادلة تصبح:** $\dfrac{d^2x}{dt^2}=c_1t+t^2$ **، وبإجراء عملية التكامل نحصل على:** $\dfrac{dx}{dt}=c_1\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+c_2$ **وبإجراء عملية التكامل مرة أخرى، نحصل على الحل العام:**

$$x=c_1\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{12}+c_2t+c_3\ .$$

المثال (3): حل المعادلة التفاضلية: $\dfrac{dy}{dx}=\sin(x+y)$

الحل: من الواضح أنّه لا يمكن حل المعادلة التفاضلية المطلوبة بالطرائق السابقة، عليه سنستخدم طريقة التعويض. نفرض أنّ $u=x+y$ **، ثم نشتق بالنسبة الى** x **، فنحصل على** $\dfrac{du}{dx}=1+\dfrac{dy}{dx}$ **، وبالتعويض في المعادلة نحصل على:** $\dfrac{du}{dx}=1+\sin u$ **، وهي معادلة من الرتبة الأولى يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات، أي أنّ :**

$$\frac{du}{1+\sin u}=dx$$

الآن نضرب البسط والمقام في الطرف الأيسر بالمرافق $(1-\sin u)$ **ونبسط فنحصل على:**

$$\frac{(1-\sin u)du}{1-\sin^2 u}=\frac{1-\sin u}{\cos^2 u}=\left[\sec^2 u-(\cos u)^{-2}\sin u\right]du=dx$$

وبالتكامل نحصل على: $\tan u-\sec u=x+c$ **، وبالتعويض عن** u **بما يساويها حسب الفرضية، نحصل على الحل العام:**

$$\tan(x+y)-\sec(x+y)=x+c\ .$$

المثال (4): حل مسألة القيمة الابتدائية: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x+2y}{3x+2y+2},\quad y(-1)=1$

الحل: من الواضح أنّه لا يمكن حل المعادلة التفاضلية المطلوبة بالطرائق السابقة، عليه نستخدم طريقة التعويض. نفرض أنّ $u=3x+2y$ ، ثم نشتق بالنسبة الى x ، فنحصل على:

$\dfrac{du}{dx}=3+2\dfrac{dy}{dx}$ **، وبالتعويض في المعادلة نحصل على:** $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{du}{dx}-3\right]=\dfrac{u}{u+2}$ **و بإجراء عملية نقل الحدود والتبسيط ، نحصل على:** $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{5u+6}{u+2}$ **. وهي عبارة عن معادلة من الرتبة الأولى يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات، أي أنّ :**

$\dfrac{(u+2)}{(5u+6)}du=dx$ **، وبضرب طرفي المعادلة بالعدد 5 وإجراء القسمة الطويلة، نحصل على:**

$\left[1+\dfrac{4}{5u+6}\right]du=5dx$ **. وبإجراء التكامل نحصل على:** $u+\dfrac{4}{5}\ln|5u+6|=5x+c$ ،

وبالتعويض عن u بما يساويها، نحصل على الحل العام:

$$3x+2y+\frac{4}{5}\ln|15x+10y+6|=5x+c$$

وبالتعويض بالشرط الابتدائي $y(-1)=1$ ، نحصل على $c=4$ ، وعليه فالحل الخاص هو:

$y+\dfrac{2}{5}\ln|15x+10y+6|=x+2$ **.**

وبذلك نكون قد تناولنا الطرائق التحليلية لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، في حين أنّه ما زال هناك معادلات من نمط معين لا يمكن حلها بالطرائق السابقة، لذلك سنلجأ الى الطرائق العددية كما في الفصل العاشر.

2.9 المخرجات التعليمية للفصل (Learning outcomes)

بعد الانتهاء من دراسة الفصل الثاني يكون الطالب قد اتقن المخرجات التعليمية الآتية:

1. التمييز بين المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى عن الرتب العليا.
2. التعرف على الطرائق المتعددة لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.
3. إيجاد حلول معادلات تفاضلية بطريقة فصل المتغيرات.
4. إجراء اختبار على المعادلات التفاضلية لمعرفة كونها تامة أم لا.
5. حل المعادلات التفاضلية التامة.
6. اختبار الدوال المتجانسة.
7. إيجاد حل المعادلات التفاضلية المتجانسة.
8. حساب عامل المكامل للمعادلات التفاضلية الاعتيادية الخطية من الرتبة الأولى.
9. إيجاد حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى باستخدام الطريقة والقانون.
10. التعرف على معادلة برنولي وطريقة حلها.
11. التعرف على معادلة ريكاتي وطريقة حلها.
12. تمييز المعادلات التفاضلية التي يمكن حلها بالطرائق القياسية السابقة عن غيرها.
13. استخدام طريقة التعويض لحل معادلات تفاضلية لا يمكن حلها بالطرائق القياسية السابقة.
14. فهم الطرائق المتعددة التي تمكن الطالب من الانتقال الى الفصل الثالث واستخدامها في التطبيقات.
15. المقدرة على استخدام القرص الممغنط المرافق للكتاب لمراجعة محتويات الكتاب.

تمارين الفصل الثاني

حل المعادلات التفاضلية في المسائل من 1- 15 بطريقة فصل المتغيرات:

1. $\frac{dy}{dx}=(1+x)^5$

2. $dx+e^{2x}dy=0$

3. $(x+1)\frac{dy}{dx}=6+x$

4. $xy'=5y$

5. $\frac{dx}{dy}=\frac{x^2y^2}{1+x}$

6. $\frac{dx}{dy}=\frac{1+2y^2}{y\sin x}$

7. $\frac{dy}{dx}=e^{5x+3y}$

8. $e^x y\frac{dy}{dx}=e^{-y}+e^{-2x-y}$

9. $y(4+x^2)dy-x(2+y^2)dx=0$

10. $(1+x^2+y^2+x^2y^2)dy=(1+y)dx$

11. $x^2y^2dy=(1+y)dx$

12. $y\ln x\frac{dx}{dy}=(\frac{y+1}{x})^2$

13. $e^y\sin 2xdx+\cos x(e^{2y}-y)dy=0$

14. $\sec y\frac{dy}{dx}+\sin(x-y)=\sin(x+y)$

15. $\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=(1+x^2)^{-1/2}(1+y)^{1/2}$

حل المعادلات التفاضلية في المسائل من 16- 20 مع الشروط الابتدائية المثبتة إزاءها :

16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-x-y}{x+y}, \quad y(1) = 1$

17. $(e^{-y}+1)\sin x dx = (1+\cos x)dy, \quad y(0) = 0$

18. $(1+x^4)dy + x(1+4y^2)dx = 0, \quad y(1) = 0$

19. $\dfrac{dy}{dt} + ty = y, \quad y(1) = 3$

20. $x^2 y' = y - xy, \quad y(-1) = -1$

حل المعادلات التفاضلية في المسائل من 21- 29 :

21. $y' = \dfrac{x^2}{y}$

22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1+y^2}$

23. $y' + y^2 \sin x = 0$

24. $y' = \dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$

25. $y' = \dfrac{3x^2 - 1}{3+2y}$

26. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$

27. $xy' = (1-y^2)^{1/2}$

28. $y' = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^{y}}$

29. $(e^x + e^{-x})y' = y^2$

حل مسائل القيمة الابتدائية في المسائل من 30- 38 :

30. $y' = y\cos x/(1+2y^2) \quad , \quad y(0) = 1$

31. $y' = (1+3x^2)/(3y^2 - 6y) \quad , \quad y(0) = 1$

$y' = 3x^2/(3y^2-4) \quad , \quad y(1)=0$ **.32**

$y' = 2y^2 + xy^2 \quad , \quad y(0)=1$ **.33**

$y' = (2-e^x)/(3+2y) \quad , \quad y(0)=0$ **.34**

$y' = 2\cos 2x/(3+2y) \quad , \quad y(0)=-1$ **.35**

$y' = 2(1+x)(1+y^2) \quad , \quad y(0)=0$ **.36**

$dx/dy = 4(1+x^2), \quad y(\pi/4)=1$ **.37**

$y' - y^2 = -9, \quad y(0)=0$ **.38**

المعادلات التفاضلية من الصيغة $\dfrac{dy}{dx} = f(ax+by+c), \; b \neq 0$ **يمكن تحويلها إلى معادلات يتم حلها بطريقة فصل المتغيرات وذلك باستخدام التعويض:** $u = ax+by+c$.

استخدم هذا الأسلوب لحل المعادلات في المسائل من 39- 43 :

$$\frac{dy}{dx} = (x+y+1)^2$$ **.39**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x-y}{x+y}$$ **.40**

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y-2x+3}$$ **.41**

$$\frac{dy}{dx} = 1 + e^{y-x+5}$$ **.42**

$$\frac{dy}{dx} = \tan^2(x+y)$$ **.43**

حل المعادلات التفاضلية في المسائل من 44- 53 :

$(x-y)dx + xdy = 0$ **.44**

$xdx + (y-2x)dy = 0$ **.45**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{3x+y}$$ **.46**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x+y} \quad .47$$

$$x\frac{dy}{dx}-y=\sqrt{x^2+y^2} \quad .48$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{x}{y} \quad .49$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{x^2}{y^2}+1 \quad .50$$

$$y\frac{dx}{dy}=x+4ye^{-2x/y} \quad .51$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} \quad .52$$

$$(x^2+xy-y^2)dx+xydy=0 \quad .53$$

جد حل مسائل القيمة الابتدائية في المسائل من 54- 57 :

$$ydx+(y\cos\frac{x}{y}-x)dy=0,\quad y(0)=2 \quad .54$$

$$xy^2dy=(y^3-x^3)dx,\quad y(1)=2 \quad .55$$

$$y^3dx=2x^3dy-2x^2ydx,\quad y(1)=\sqrt{2} \quad .56$$

$$2x^2y'=3xy+y^2,\quad y(1)=-2 \quad .57$$

هل المعادلات في المسائل من 58 - 69 تامة ؟ إذا كانت تامة جد الحل :

$$2x+3+2(y-1)y'=0 \quad .58$$

$$2x+4y+2(x-y)y'=0 \quad .59$$

$$(3x^2-2xy+2)dx+(6y^2-x^2+3)dy=0 \quad .60$$

$$2xy^2+2y+(2x^2y+2x)y'=0 \quad .61$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{bx+cy} \quad .62$$

63. $$\frac{dy}{dx}=\frac{ax-by}{bx-cy}$$

64. $$(e^x \sin y-2y\sin x)dx+(e^x \cos y+2\cos x)dy=0$$

65. $$(e^x \sin y+3y)dx+(3x-e^x \sin y)dy=0$$

66. $$\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}}+\frac{ydy}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$$

67. $$(x\ln x+xy)dx+(y\ln x+xy)dy=0,\quad x>0,\quad y>0$$

68. $$(\frac{y}{x}+6x)dx+(\ln x-2)dy=0,\quad x>0$$

69. $$(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x)dx+(xe^{xy}\cos 2x-3)dy=0$$

حل مسائل القيمة الابتدائية في المسائل من 70- 73 :

70. $$(2x-y)dx+(2y-x)dy=0,\quad y(1)=3$$

71. $$(x+y)^2 dx+(2xy+x^2-1)dy=0,\quad y(1)=1$$

72. $$(9x^2+y-1)dx-(4y-x)dy=0,\quad y(1)=0$$

73. $$(2x+4y-5)dx+(6y+4x-1)dy=0,\quad y(-1)=2$$

هل المعادلات في المسائل من 74- 77 تامة؟ جد الحل :

74. $$(2x-3y+1)dx-(3x+2y-4)dy=0$$

75. $$(x^3+3xy^2)dx+(y^3+3x^2y)dy=0$$

76. $$(1-2x^2-2y)dy=(4xy+4x^3)dx$$

77. $$(1-\frac{3}{x}+y)dx+(1-\frac{3}{y}+x)dy=0$$

جد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية في المسائل من 78- 90 :

78. $$y'+y\cos x=2\cos x$$

79. $$(x\ln x)\ y'+y=x,\quad x>0$$

$y' + y\tanh x = 2\sinh x$ .80

$xy' + 4y = x^3 - x$ .81

$xy' + y = \cos x, \quad x \neq 0$ .82

$\cos^2 x \sin x dy + (y\cos^3 x - 1)dx = 0$ .83

$y'\cos x + y\sin x = 1$ .84

$y' + 3x^2 y = x^2$ .85

$(1+x^2)^{3/2} y' + x(1+x^2)^{1/2} y = x^2$ .86

$xy' + 2y = x^3, \quad x \neq 0$ .87

$y'\cos x - 2y\sin x = \sin^3 x$ .88

$y' + 2xy = e^{-x^2}$ .89

$y' = \sec x - y\tan x$ .90

جد الحل العام للمعادلات التفاضلية في المسائل من 91- 102 :

$(\csc y + x\cot y)y' = 1$ .91

$(1+\cos y) = y'(\sin y + \sin y\cos y - x)$ .92

$y' + 2xy + xy^4 = 0$ .93

$y' + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1-2x)y^4$ .94

$y' - y = xy^3$ .95

$y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$ .96

$yy' - xy^2 + x = 0$ .97

$xdy - [y + xy^3(1+\ln x)]dx = 0, \quad x > 0$ .98

$y' - y = xy^2$ .99

$xdy + ydx = x^3 y^6 dx$ .100

$y' + y = y^2 e^x$ .101

$(2xy^5 - y)dx + 2xdy = 0$ **.102**

جد حل المعادلات التفاضلية البرنولية في المسائل من 103- 109 :

$x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$ **.103**

$\dfrac{dy}{dx} - y = e^x y^2$ **.104**

$\dfrac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$ **.105**

$x\dfrac{dy}{dx} - (1+x)y = xy^2$ **.106**

$t^2\dfrac{dy}{dt} + y^2 = ty$ **.107**

$y^{\frac{1}{2}}\dfrac{dy}{dx} + y^{\frac{3}{2}} = 1,\ \ y(0) = 4$ **.108**

$x^2\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4,\quad y(1) = \dfrac{1}{2}$ **.109**

هل المعادلات التفاضلية في المسائل من 110- 114 من نوع ريكاتي؟ جد عائلةالحلول إذا علمت أن y_1 حل للمعادلة :

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + x^3y^2 - x^5,\quad y_1(x) = x$ **.110**

$\dfrac{dy}{dx} = -2 - y - y^2,\ \ y_1 = 2$ **.111**

$\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x} + xy^2 - x^5,\quad y_1(x) = x^2$ **.112**

$\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2,\quad y_1 = e^{-x}$ **.113**

$\dfrac{dy}{dx} = x^2y - y^2 - x,\quad y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ **.114**

اثبت أنّ y_1 المعطاة مع كل معادلة تفاضلية في المسائل من 115- 123 تمثل حلاً خاصاً لها:

.115 $y' = xy^2 + (1-2x)y + x - 1 \qquad , y_1 = 1$

.116 $y' = (y-1)(y+\frac{1}{x}) \qquad , y_1 = 1$

.117 $y' = (x+y)(x+y-2) \qquad , y_1 = 1-x$

.118 $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x \qquad , \quad y_1 = e^x$

.119 $y' = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x} \qquad , \quad y_1 = x$

.120 $x^2y' = x^2y^2 + xy - 3 \qquad , \quad y_1 = \frac{1}{x}$

.121 $xy' = 2(x-y)^2 + (x-y) + x \qquad , y_1 = x$

.122 $x^2\frac{dy}{dx} = (y-1)(x+y-1), \quad y(1) = 1$

.123 $x^2y' = 3x^2y^2 + xy - 1 \qquad , y_1 = \frac{1}{3x}$

هل المعادلات التفاضلية في المسائل من 124- 129 من نوع كليرت؟ جد الحل:

.124 $y = xy' + (y')^2$

.125 $y = xy' + 1 - \ln y'$

.126 $y = (x+4)y' + (y')^2$

.127 $y = xy' - (y')^3$

.128 $y - xy' = \ln y'$

.129 $xy' - y = e^{y'}$

جد حلاً متصلاً يحقق المعادلات التفاضلية في المسائل من 130- 133 مع الشرط الابتدائي المبين أزاء كل معادلة، وضح ذلك بالرسم:

.130 $\frac{dy}{dx} + y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x \le 1 \\ -1 & , \quad x > 1 \end{cases}, \quad \mathrm{y}(0) = 1$

$$\frac{dy}{dx}+2y=f(x),\quad f(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0\le x\le 3\\ 0 & , \quad x>3\end{cases},\quad \mathrm{y}(0)=0$$ **.131**

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=f(x),\ f(x)=\begin{cases}x & , \quad 0\le x<1\\ -x & , \quad x\ge 1\end{cases},\ \mathrm{y}(0)=0$$ **.132**

$$\frac{dy}{dx}+2xy=f(x),\quad f(x)=\begin{cases}x & , \quad 0\le x<1\\ 0 & , \quad x\ge 1\end{cases},\quad \mathrm{y}(0)=2$$ **.133**