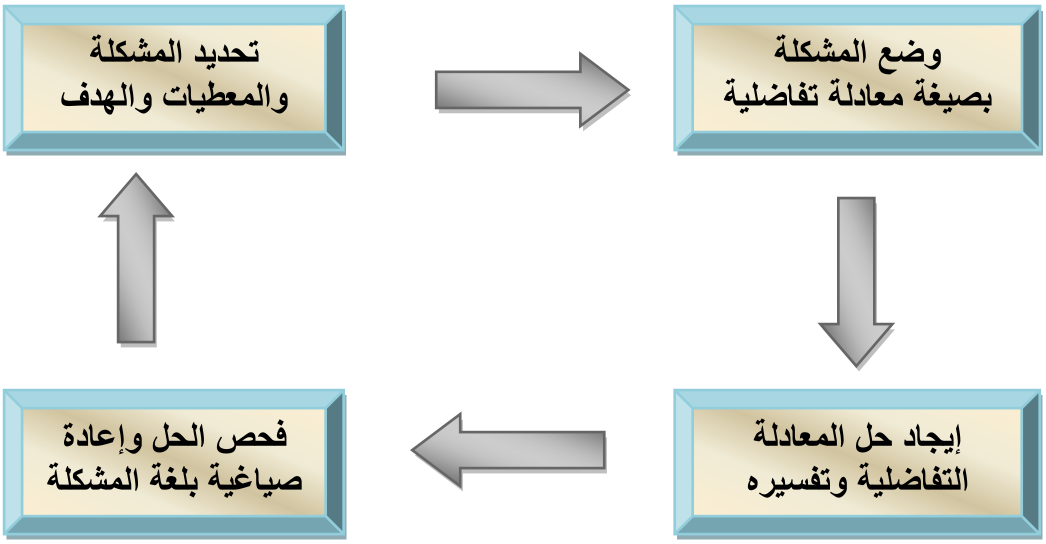
الفصل الثالث

تطبيقات المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى
(Application to first order differential equations)

تتسم المعادلات التفاضلية بأهميتها الكبيرة في تطبيقاتها التي تشمل مجالات العلوم والمعرفة كافة، فهي حلقة وصل بين الرياضيات والعلوم الأخرى، مثل: الهندسة التحليلية والفيزياء والكيمياء وعلم الأحياء، والهندسة، ... الخ. فهي تساعد على فهم القوانين والظواهر الطبيعية والحياتية وتساعد في حل مشكلاتها. ولتطبيق المعادلات التفاضلية على المجالات المذكورة سابقاً، نلاحظ أنّ ذلك يمر في أربع مراحل:

1. **تحديد المشكلة والمعطيات والهدف ووضعها بصيغة رياضية باستخدام المنطق الرمزي.**
2. **تشكيل معادلة تفاضلية من هذه المعطيات تمثل المشكلة.**
3. **إيجاد حل المعادلة التفاضلية بإحدى الطرائق التي تناولناها في الفصل الثاني ودراسة خواصه.**
4. **فحص الحل وترجمته الى لغة المشكلة والحصول على الجواب.**

يمكن تلخيص الخطوات السابقة بالمخطط الانسيابي الآتي:



3.1 المسارات المتعامدة (Orthogonal trajectories)

سنتناول في هذا البند أحد هذه التطبيقات التي تؤدي دوراً مهماً في الرياضيات والفيزياء.

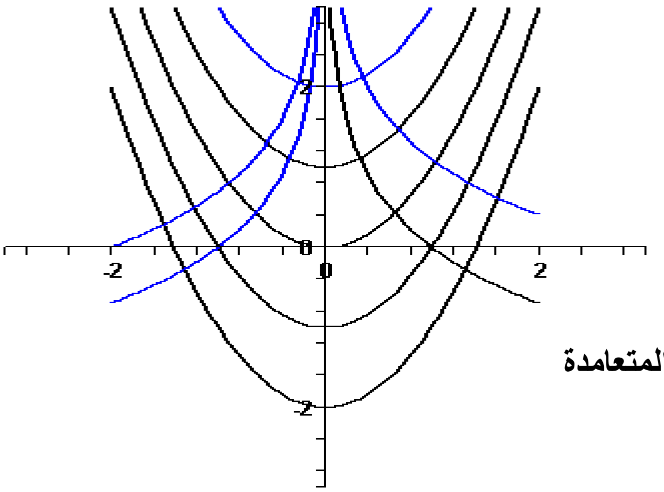
ليكن لدينا عائلة منحنيات بمَعْلَمَة واحدة:

$$F(x, y, c_1) = 0 \qquad (3.1)$$

عندئذٍ يمكننا إيجاد عائلة منحنيات بمَعْلَمَة واحدة اخرى بحيث تتقاطع مع العائلة الأولى على التعامد:

$$G(x, y, c_2) = 0 \qquad (3.2)$$

تسمى العائلة G بـ "المسارات المتعامدة" ، كما موضح في الشكل (3.1).



الشكل (3.1)

تؤدي المسارات المتعامدة دوراً مهماً في: سريان الموائع (Fluied flow) ، الكهربائية الساكنة (Electrostatics)، الموصلات الحرارية (Heat conduction)، وفروع أخرى في الفيزياء. على سبيل المثال (كما سنبين ذلك لاحقاً) إنّ خطوط تساوي الجهد هي مسارات متعامدة على خطوط القوى الكهربائية.

من الواضح أنّ العائلة F عمودية على العائلة G وتكتب $F \perp G$ وتعني أنّ المستقيمات المماسة للعائلة F عمودية على المستقيمات المماسة للعائلة G عند نقطة التقاطع. أي أنّ ميل المستقيم المماس لمنحني العائلة F وليكن m_1 عمودي على ميل المستقيم المماس لمنحني العائلة G وليكن m_2 عند نقطة التقاطع ولتكن $P(x_0, y_0)$. من المعروف في حسبان التفاضل والتكامل أنّ هذا التعامد يتحقق إذا وفقط إذا:

$$m_1 m_2 = -1 \qquad (3.3)$$

أي أنّ :

$$F'(x_0, y_0) \times G'(x_0, y_0) = -1$$

المثال (1): هل المنحني $y_1 = x$ عمودي على المنحني $y_2 = \dfrac{1}{x}$ عند النقطة $(1,1)$ ؟

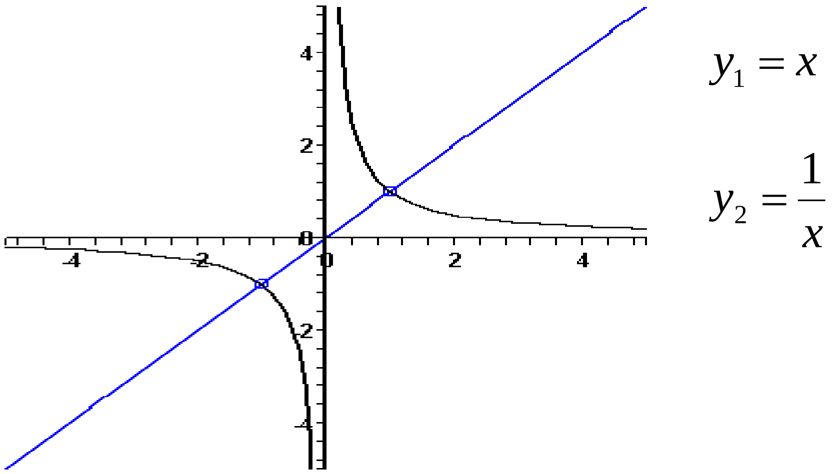
الحل: نحسب ميل المماس للمنحني الأول عند النقطة $(1,1)$:

$$m_1 = \left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{(1,1)} = 1$$

ثم نحسب ميل المماس للمنحني الثاني عند النقطة $(1,1)$:

$$m_2 = \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{(1,1)} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)_{(1,1)} = -1$$

إذاً $m_1 m_2 = -1$ ، أي أنّ المنحنيين متعامدان عند النقطة $(1,1)$ ، كما موضح في الشكل (3.2):



الشكل (3.2)

لنعد الى المسألة الرئيسة وهي المسارات المتعامدة. لإيجاد المسارات المتعامدة على عائلة منحنيات بمَعْلَمَة واحدة c_1، نتبع الخطوات الآتية:

1. **نجد المعادلة التفاضلية التي تقابل عائلة المنحنيات بمَعْلَمَة واحدة c_1 ، باشتقاقها:**

$$y' = f(x,y) \qquad (3.4)$$

2. **نجد المَعْلَمَة c_1 بدلالة $x,\ y$ ونعوضها في المعادلة التفاضلية (3.4).**
3. **نكتب المعادلة التفاضلية التي تقابل المسارات العمودية على العائلة المعلومة:**

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)} \qquad (3.5)$$

4. **نجد حل المعادلة التفاضلية (3.5) فنحصل على المسارات المتعامدة وهي عبارة عن عائلة منحنيات بمَعْلَمَة واحدة c_2.**

المثال (2): جد المسارات العمودية على:

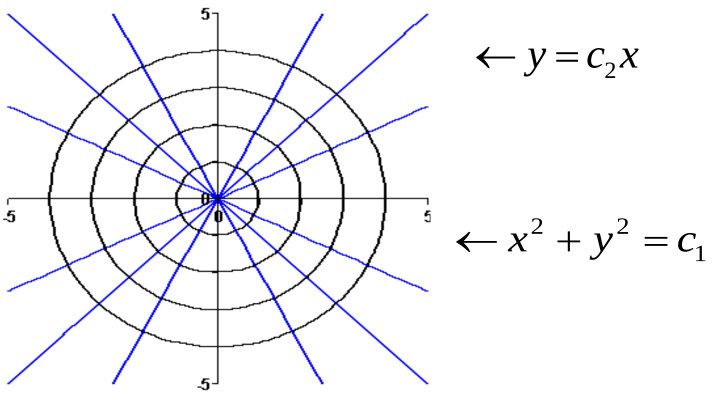
$$x^2 + y^2 = c_1 \qquad (3.6)$$

حيث إنّ c_1 ثابت اختياري.

الحل: نلاحظ أنّ عائلة المنحنيات بمَعْلَمَة واحدة (3.6) تمثل عائلة دوائر متحدة المركز عند نقطة الأصل يمكن كتابتها بشكل: $F(x,y,c_1) = x^2 + y^2 - c_1 = 0$ وأنّ المَعْلَمَة هي الثابت الاختياري c_1.

نشتق بالنسبة الى المتغير المستقل x، فنحصل على: $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ ، ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية التي تقابل العائلة (3.6): $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$. عندئذٍ تكون المعادلة التفاضلية التي تقابل المسارات المتعامدة هي: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

نستخدم طريقة فصل المتغيرات، فنحصل على: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$ وبالتكامل نحصل على حل المعادلة التفاضلية: $\ln|y| = \ln|x| + \ln|c_2|$. إذاً عائلة المسارات العمودية هي : $y = c_2 x$ وتمثل عائلة مستقيمات تمر من نقطة الأصل. أي أنّ المسارات المتعامدة على عائلة الدوائر متحدة المركز عند نقطة الأصل هي عائلة مستقيمات تمر من نقطة الأصل، كما موضح في الشكل (3.3):



الشكل (3.3)

ملاحظة: المثال (2) له ارتباط وثيق بالمجال الكهربائي (Electric field) لأنّه في المجال الكهربائي بين اسطوانتين متحدتي المركز تكون خطوط تساوي الجهد عبارة عن دوائر متحدة المركز: (فولت) $U(x,y) = x^2 + y^2 = c$ و إنّ مساراتها المتعامدة عبارة عن خطوط مستقيمة تسمى خطوط المجال الكهربائي.

المثال (3): جد عائلة المسارات العمودية على:

$$y = c_1 x^2 \qquad (3.7)$$

حيث إنّ c_1 ثابت اختياري.

الحل: نلاحظ أنّ عائلة المنحنيات بمَعْلَمَة واحدة (3.7) تمثل عائلة قطوع مكافئة (Parabola) تمر من نقطة الأصل، فتحتها نحو الأعلى عندما تكون $c_1 > 0$ ونحو الأسفل عندما تكون $c_1 < 0$ وتكون خطاً مستقيماً (محور- x) عندما $c_1 = 0$، كما موضح في الشكل (3.4). ويمكن كتابتها بشكل:

$$F(x, y, c_1) = y - c_1 x^2 = 0$$

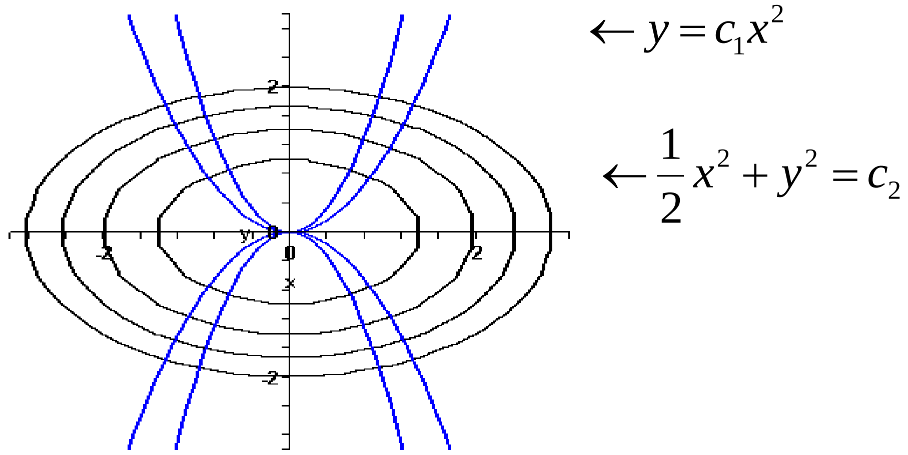
حيث أنّ المَعْلَمَة هي الثابت الاختياري c_1.

نشتق بالنسبة الى المتغير المستقل x، فنحصل على: $2c_1 x = \frac{dy}{dx}$. الآن نجد c_1 من المعادلة (3.7) فنحصل على $\frac{y}{x^2} = c_1$ ، ثم نعوض عن c_1 بما يساويها في المعادلة التفاضلية السابقة، فنحصل على: $2(\frac{y}{x^2})x = \frac{dy}{dx}$ ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية التي تقابل العائلة (3.6): $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$. عندئذٍ تكون المعادلة التفاضلية التي تقابل المسارات المتعامدة هي: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$.

نستخدم طريقة فصل المتغيرات، فنحصل على: $2ydy = -xdx$ وبالتكامل نحصل على حل المعادلة التفاضلية: $y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c_2$. إذاً عائلة المسارات العمودية هي:

$$\frac{1}{2}x^2 + y^2 = c_2$$

وتمثل عائلة قطوع ناقصة (Ellipse) مركزها نقطة الأصل، ومحورها الرئيس هو المحور-x. أي أنّ المسارات المتعامدة على عائلة القطوع المكافئة التي مركزها نقطة الأصل هي عائلة القطوع الناقصة التي مركزها نقطة الأصل ومحورها الرئيس هو محور- x، كما موضح في الشكل (3.4):



الشكل (3.4)

المثال (4): جد خطوط تساوي الجهد (Equipotential Lines) التي تمثل المسارات العمودية على عائلة خطوط الانسياب (Streamlines) للجريان عبر قناة: $xy = c_1$.

الحل: تمثل خطوط انسياب السريان عبر قناة عائلة قطوع زائدة مركزها نقطة الأصل. كما في الشكل (3.5). الآن نشتق بالنسبة الى المتغير المستقل x ، فنحصل على: $x\frac{dy}{dx} + y = 0$ ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية التي تقابل عائلة خطوط الانسياب: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. عندئذٍ تكون المعادلة التفاضلية التي تقابل المسارات المتعامدة هي: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

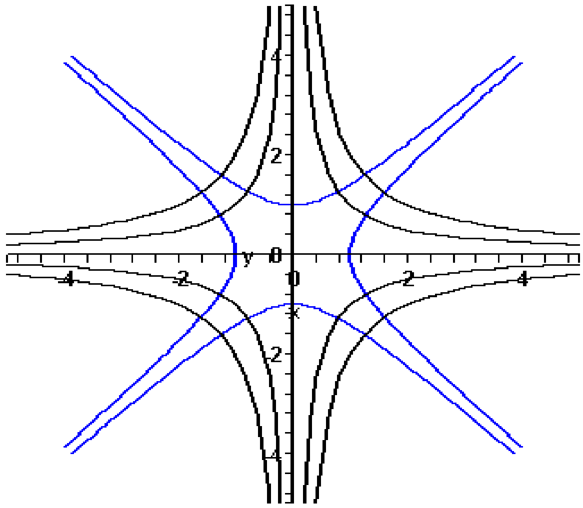
نستخدم طريقة فصل المتغيرات، فنحصل على: $ydy = xdx$ وبالتكامل نحصل على حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}c_2$$

إذاً عائلة المسارات العمودية على عائلة خطوط الانسياب للسريان هي:

$$y^2 - x^2 = c_2$$

التي تمثل خطوط تساوي الجهد، وهي عبارة عن قطوع زائدة أيضاً مركزها نقطة الأصل، أنظر الشكل (3.5):



الشكل (3.5)

الآن سنتناول المسارات المتعامدة بالصيغة القطبية (r,θ):

ليكن لدينا منحني C بالصيغة القطبية متمثل بالدالة : $r = f(\theta)$

وليكن لدينا نقطة $P(r,\theta)$ تقع على المنحني، عندئذٍ يسمى الخط الواصل بين النقطة P ونقطة الأصل بالخط الشعاعي (Radial line). لتكن φ الزاوية المحصورة بين المستقيم المماس للمنحني عند النقطة P والخط الشعاعي بالاتجاه الموجب (عكس عقرب الساعة)، كما مبين في الشكلين (3.6) و (3.7). إذاً من حسبان التفاضل والتكامل يكون:

$$r\frac{d\theta}{dr} = \tan\varphi$$

الآن ليكن لدينا منحنيان بالصيغة القطبية: $C_1 : r = f_1(\theta)$ و $C_2 : r = f_2(\theta)$. من المعروف في حسبان التفاضل والتكامل (حقق ذلك) أنّ المنحنيين: $r = f_1(\theta)$ و $r = f_2(\theta)$ يكونان متعامدين عند نقطة تقاطعهما إذا وفقط إذا كان:

$$(\tan\varphi_1)_{C_1} .(\tan\varphi_2)_{C_2} = -1$$

منها نستنتج: إذا كانت $F(r,\theta,r\frac{d\theta}{dr}) = 0$ معادلة تفاضلية تمثل عائلة منحنيات بالإحداثيات القطبية، فإنّ المسارات العمودية عليها هي: $G(r,\theta,-\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}) = 0$ ، لإنّ: $(\tan\varphi_1)_{C_1} = r\frac{d\theta}{dr}$

و

$$\left(\tan\varphi_2\right)_{C_2} = \tan(\frac{\pi}{2}+\varphi_1) = -\cot\varphi_1 = -\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}$$

المثال (5): استخدم الاحداثيات القطبية لإيجاد المسارات العمودية على العائلة

$$x^2 + y^2 = 2c_1 x$$

الحل: باستخدام الإحداثيات القطبية (r,θ) وبنقل المعادلة من الإحداثيات الكارتيزية الى القطبية مستخدماً التحويل: $x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$ نحصل على: $r = 2c_1\cos\theta$

التي تمثل عائلة المنحنيات بالإحداثيات القطبية، والمطلوب إيجاد المسارات العمودية عليها.

بإجراء المشتقة بالنسبة الى θ نحصل على المعادلة التفاضلية: $\frac{dr}{d\theta} = -2c_1\sin\theta$.

بإيجاد قيمة $c_1 = \frac{r}{2\cos\theta}$ والتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$\frac{dr}{d\theta} = -2\left(\frac{r}{2\cos\theta}\right)\sin\theta = -r\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية بالاحداثيات القطبية التي تمثل عائلة المنحنيات:

$$r\frac{d\theta}{dr} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\varphi_1$$

وعليه إنّ المعادلة التفاضلية التي تقابل المسارات العمودية هي:

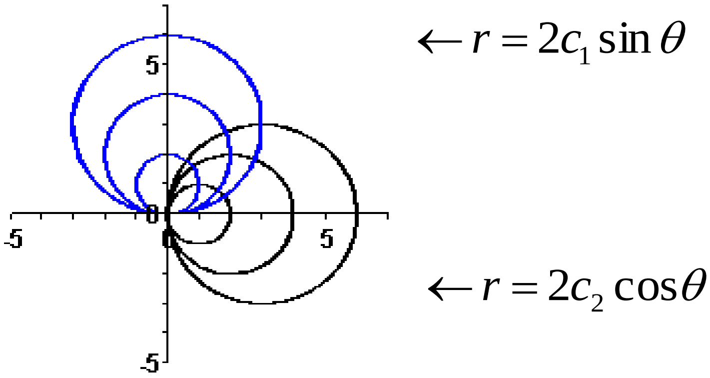
$$r\frac{d\theta}{dr} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\varphi_2$$

وبفصل المتغيرات نحصل على: $\frac{dr}{r} = \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta}$ و منها بعد إجراء التكامل نحصل على:

$$\ln r = \ln|\sin\theta| + \ln|2c_2|$$

إذاً المسارات العمودية هي: $r = 2c_2\sin\theta$. أي أنّ المسارات العمودية على العائلة: $r = 2c_1\cos\theta$ هي العائلة: $r = 2c_2\sin\theta$. لاحظ الشكل (3.6).

بالإحداثيات الكارتيزية نجد أنّ المسارات العمودية على العائلة: $x^2 + y^2 = 2c_1 x$ هي العائلة: $x^2 + y^2 = 2c_2 y$. وتمثل المسارات العمودية عائلة الدوائر التي تمس محور- x عند نقطة الأصل.



الشكل (3.6)

المثال (6): جد المسارات العمودية على : $r = c_1(1-\sin\theta)$

الحل: نشتق ونعوض بالثابت c_1 **، فنحصل على:**

$$\frac{dr}{d\theta} = -c_1\cos\theta = -\left(\frac{r\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$$

ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية التي تقابل عائلة المنحنيات:

$$r\frac{d\theta}{dr} = -\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \tan\varphi_1$$

أي أنّ المعادلة التفاضلية التي تقابل عائلة المسارات العمودية:

$$r\frac{d\theta}{dr} = \left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right) = \tan\varphi_2$$

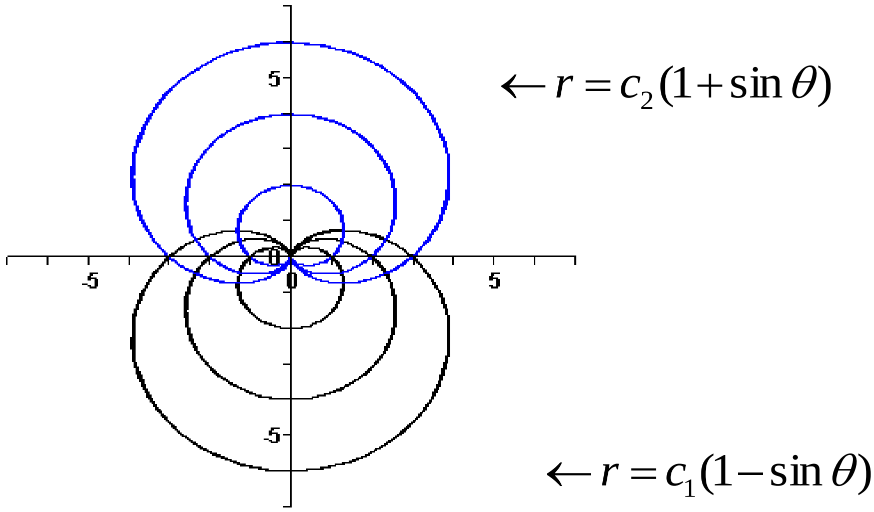
الآن نحل المعادلة بطريقة فصل المتغيرات، فنحصل على:

$$\frac{dr}{r} = \left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)d\theta = (\sec\theta - \tan\theta)\,d\theta$$

ومنها نحصل على الحل:

$$\ln|r| = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + \ln|\cos\theta| + \ln|c_2|$$
$$= \ln|c_2(1+\sin\theta)|$$

إذاً المسارات العمودية هي: $r = c_2(1+\sin\theta)$ **. والشكل (3.7) يبين ذلك.**



الشكل (3.7)

3.2 تطبيقات في الفيزياء (Applications in Physics)

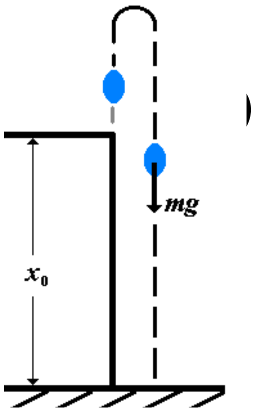
لننتقل الآن الى تطبيقات من نمط آخر تتعلق بالفيزياء، سنبدأ بالاجسام الساقطة سقوطاً حراً (Free fall) بالقرب من سطح الارض. من المعروف في الفيزياء أنّ الجسم الساقط تكون سرعته الابتدائية v_0 (بالطبع يمكن أن تساوي صفراً)، ويسير على خط مستقيم ذي اتجاه عمودي على سطح الارض وحركته تكون بتسارع ثابت يسمى التعجيل الارضي ويرمز له بالرمز g أما قيمته فهي تقترب من 9.8 م/ثا ^{2} (حسب نظام الوحدات الدولي - IS) أو 32 قدم/ ثا ^{2} (حسب نظام الوحدات البريطاني). سنستخدم في هذا الكتاب نظام الوحدات الدولي تماشياً مع الاتجاه المعاصر في كتب الفيزياء الحديثة، وقد نستخدم احياناً نظام الوحدات البريطانية وخاصة في التمارين لتعويد الطالب على النظامين وسهولة مراجعة المصادر في كتب المعادلات التفاضلية التي غالبيتها تستخدم النظام البريطاني كون الحسابات أيسر و أبسط. والجدول الآتي يوضح الفرق بين النظامين:

جدول نظام الوحدات المستخدمة في قانون نيوتن الثاني في الحركة

المادة	النظام البريطاني	النظام العالمي
الكتلة	سلج (رطل- ثا ^{2}/قدم) *slug*	كيلوغرام (كغم) *kg*
القوة	رطل *lb*	نيوتن (متر- كغم/ ثا ^{2}) *N*
المسافة	قدم *ft*	متر *m*
الزمن	ثانية (ثا) *sec*	ثانية (ثا) *sec*

كما سنبين ذلك في المثال الآتي.

المثال (1): قذف جسم كتلته m رأسياً نحو الأعلى من سطح بناية ارتفاعها x_0 بسرعة ابتدائية مقدارها v_0، جد الارتفاع $x(t)$ والسرعة $v(t)$ عند أي زمن t إذا علمت أنّ التعجيل الأرضي الثابت g . كما مبين في الشكل (3.8).



الشكل (3.8)

الحل: لنفترض أنّ الاتجاه الموجب هو نحو الاعلى. فعندئذٍ حسب قانون نيوتن الثاني: $F = ma$

$$-mg = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

ومنه نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

وجود الاشارة السالبة يعزى لأنّ وزن الجسم هو قوة متجهة نحو الأسفل أي عكس الاتجاه. وبإجراء عملية التكامل والتعويض في الشرط الابتدائي $v(0) = v_0$، نحصل على سرعة الجسم عند أيّ زمن t:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -gt + v_0$$

وبإجراء عملية التكامل ثانيةً والتعويض في الشرط الابتدائي $x(0) = x_0$ ، نحصل على ارتفاع الجسم عند أيّ زمن t:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

ملاحظة: عندما تكون السرعة الابتدائية صفراً، أي $v_0 = 0$ ، فإنّ ارتفاع الجسم عند أيّ زمن t يصبح:

$$x(t) = x_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

المثال (2): سقطت كرة من أعلى بناية ارتفاعها 16 متراً . جد ارتفاع الكرة $x(t)$ عن سطح الارض عند أي زمن t ، ثم جد ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة.

الحل: بما أنّ الجسم سقط من أعلى بناية دون دفع، فعليه تكون السرعة الابتدائية تساوي صفراً. باعتبار أنّ التعجيل الارضي يساوي $g = 9.8\, m/\sec^2$ ، وبتطبيق المعادلة : $x(t) = x_0 - \frac{1}{2} g t^2$

نحصل على ارتفاع الجسم الساقط عن الأرض عند أيّ زمن t:

$$x(t) = 16 - \frac{1}{2}(9.8)t^2 = 16 - 4.9\, t^2 .$$

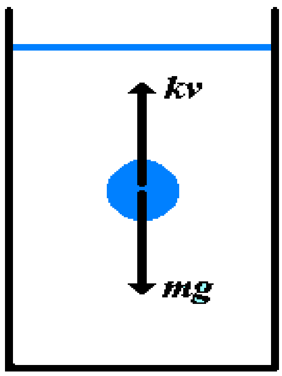
أما ارتفاع الجسم بعد ثانية واحدة فهو:

$$x(t) = 16 - 5(1)^2 = 11.1 \text{ m (متر)}$$

لاحظنا في المثالين السابقين أننا قد اهملنا مقاومة الهواء او اي تدخل في حركة الاجسام، ننتقل الآن الى تطبيقات في الفيزياء من نمط آخر. سنفترض ان الجسم يتحرك داخل مائع فيه مقاومة، تسمى هذه الحالة بـ "الحركة خلال الموائع" (Motion in fluids) كما سنوضح ذلك في المثال الآتي:

المثال (3): سقط جسم كتلته m من السكون في مائع تتناسب مقاومته مع مقدار سرعة الجسم v بفرض أنّ التعجيل الأرضي هو الثابت g . جد ارتفاع الجسم وسرعته عند أية لحظة t.

الحل: نأخذ محور- x الخط الرأسي واتجاهه الموجب نحو الأسفل، كما في الشكل (3.9):



الشكل (3.9)

ليكن وزن الجسم mg يؤثر رأسياً نحوالأسفل (أي له اتجاه موجب). عندئذٍ المقاومة هي kv، حيث إنّ $k > 0$ ثابت التناسب. وبذلك قانون نيوتن يأخذ الصيغة: $mg - kv = m\frac{dv}{dt}$. أي أنّ :

$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g$ وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى فيها عامل المكامل: $\mu(t)=e^{\frac{k}{m}t}$

والحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$v=\frac{mg}{k}+ce^{-\frac{k}{m}t}$$

وبالتعويض بالشرط الابتدائي $v(0)=0$، نحصل على: $c=-\frac{mg}{k}$. أي أنّ سرعة الجسم هي:

$$v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$$

نلاحظ عندما $t\to\infty$ أنّ $v=v_e=\frac{mg}{k}$.

للحصول على الازاحة $x(t)$ ، نعوض عن $v=\frac{dx}{dt}$، فنحصل على:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$$

بإجراء عملية التكامل والتعويض بالشرط الابتدائي $x(0)=0$ ، نحصل على الإزاحة:

$$x(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}(1-e^{-\frac{k}{m}t}).$$

المثال (4): أطلقت مركبة فضاء كتلتها الابتدائية m_0 رأسياً نحو الأعلى بسرعة ابتدائية v_0 فإذا كانت كتلة الوقود في الخزان m_f $(m_0>m_f)$ تتناقص بسبب الاحتراق بمعدل ثابت β خلال فترة زمنية t_1 وسرعة اندفاع الغاز الناتج من احتراق الوقود تساوي u بفرض أنّ الجاذبية ثابتة وإهمال مقاومة الهواء، جد السرعة عندما يكون الوقود قد احترق كلياً.

الحل: إنّ كتلة المركبة عند أية لحظة هي: $m(t)=m_0-\beta t,\quad t<t_1$

عندما يكون $t=t_1$ ، فإنّ كتلة المركبة تصبح: $m_1=m_0-\beta t_1=m_0-m_f$

عندما تكون: $t<t_1$ ، فإنّ معادلة الحركة هي: $m(t)\frac{dv}{dt}=-m(t)g+u\frac{dm}{dt}$. أي أنّ:

$(m_0-\beta t)\frac{dv}{dt}=-(m_0-\beta t)g+u\beta$ وعليه $\frac{dv}{dt}=-g+\frac{u\beta}{(m_0-\beta t)}$ وهي معادلة من

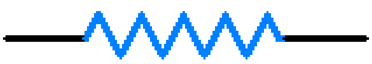
الرتبة الأولى يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات ونحصل على الحل العام:
$v = -mg - u\ln(m_0 - \beta t) + c$ حيث إنّ c ثابت اختياري. بالتعويض بالشرط الابتدائي:
$v = v_0$ عندما $t = 0$ ، نحصل على: $v_0 + u\ln m_0 = c$ ، أي
أنّ: $v = v_0 - gt + u\ln(\frac{m_0}{m_0 - \beta t}), \quad t < t_1$ وبذلك تكون السرعة عند احتراق الوقود كلياً هي:
$v_1 = v_0 - g(\frac{m_f}{\beta}) + u\ln(\frac{m_0}{m_0 - m_f})$. فإذا كانت هذه السرعة أكبر من سرعة الهروب عند الارتفاع الذي وصلت اليه المركبة في تلك اللحظة فإنّ المركبة تكون قادرة على ترك مجال الجاذبية الأرضية وإلا فإنّها ستعود مرة أخرى الى سطح الأرض (مالم تتدخل في حركة المركبة عوامل إضافية أخرى). يتضح من حل المعادلة التفاضلية أنّ سرعة المركبة تتزايد بزيادة سرعة اندفاع الغاز الناتج من الاحتراق.

3.3 تطبيقات في الكهربائية - الدارات الكهربائية (Electric circuits)

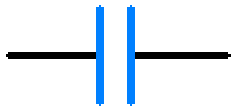
سنتناول في هذا البند المعادلات التفاضلية الخطية التي تخدم سريان التيار الكهربائي داخل دارة كهربائية بسيطة. يعود الفضل في تناول هذه التطبيقات الى كل من العالمين الالمانيين:

- جورج أوم (George Ohm) : عالم فيزيائي الماني عاش خلال الفترة (1787- 1854م) اشتهر بوضع قوانين التيار الكهربائي التي سنستخدمها لاحقاً، زامل الرياضي الشهيردرشلي (Dirichlet). في بدء الأمر لم يصدق زملاؤه وأقرانه اكتشافاته مما جعله يقدم استقالته من كرسي الأستاذية وينعزل، لكن فيما بعد أيقن زملاؤه عظمة اكتشافاته فعززوه وكرموه.
- كوستاف كيرتشوف (Gustav Kirchhoff) عالم فيزيائي الماني أيضاً عاش خلال الفترة (1842- 1887م) اشتهر بقوانينه في الكهربائية، وهو معروف لكل طلبة الفيزياء من خلال قانونيه، القانون الثاني (قانون الحلقة) الذي سنستخدمه لاحقاً. كما اشتهر في تحليل الطيف الذي استخدمه في دراسته للنجوم.

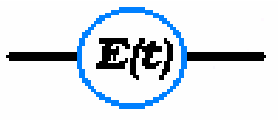
ليكن لدينا الآن دارة كهربائية بسيطة (أحياناً نختصر ونقول دارة) تحتوي على:

- محاثة أو ملف (Inductor) حثها الذاتي L هنري 
- مقاومة (Resistor) مقدارها R أوم 

- متسعة أو مكثف (Capacitor) سعتها C فراد



- قوة دافعة كهربائية emf (Electromotive force)
التي جهدها $E(t)$ فولت. ومن أهم مصادرها: بطاريات ، مولدات، وخلاية شمسية



الشكل (3.10)

حيث إنّ L و R ، و C ثوابت، وإنّ $E(t)$ تعتمد على الزمن t، كما مبين في الشكل (3.10).

ليكن $i(t)$ أمبيراً يرمز للتيارالمار بالدارة الكهربائية عند أي زمن t ، وليكن $q(t)$ كولوماً يمثل كمية الشحنة عند أي زمن t . إنّ العلاقة بين التيار وكمية الشحنة هي: $\frac{dq}{dt} = i(t)$.

حسب قانون أوم الذي ينص على إنّ:

- **فرق الجهد على طرفي الملف هو:** $E_L = L\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} = L\frac{\mathrm{d}^2 q}{dt^2}$

- **فرق الجهد على طرفي المقاومة هو:** $E_R = R\, i(t) = R\frac{dq}{dt}$

- **فرق الجهد على طرفي المتسعة هو:** $E_C = \frac{1}{C} q(t)$

قاعدة كيرتشوف الثانية – قاعدة الحلقة (Loop rule)

تنص قاعدة كيرتشوف الثانية على أنّ المجموع الجبري لفروق الجهد حول جميع عناصر دارة كهربائية مغلقة هو صفر. هذا يعني:

$$E(t) - E_R - E_L - E_C = 0$$

أي أنّ:

$$E(t) = E_R + E_L + E_C$$

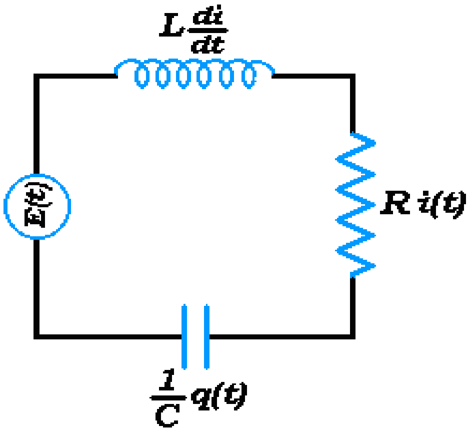
التي يمكن كتابتها بالصيغة:

$$E(t) = L\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} + R\, i(t) + \frac{1}{C} q(t) \qquad (3.8)$$

أي أنّ:

$$E(t) = L\frac{\mathrm{d}^2 q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q(t) \qquad (3.9)$$

المعادلة (3.8) تعني أنّ فرق الجهد عند طرفي القوة الدافعة الكهربائية في دارة كهربائية مغلقة يساوي مجموع فروق الجهد عند طرفي العناصر الاخرى المارة في الدارة، كما مبين في الشكل (3.11)

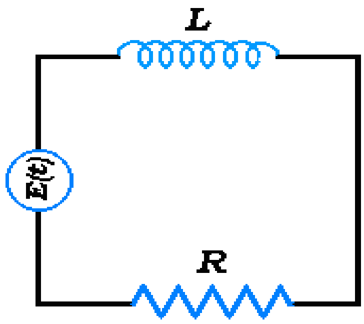


الشكل (3.11)

نلاحظ أنّ المعادلة (3.8) هي معادلة خطية من الرتبة الثانية، لم يسبق أن درسنا طريقة حلها وهذا ما سنفعله في الفصل الرابع. عليه سنتناول نوعين من الدارات:

1. دارة كهربائية (مقاومة – ملف):

تحتوي هذه الدارة المغلقة على: قوة دافعة كهربائية ومقاومة، ومحاثة فقط، كما مبين في الشكل (3.12).



الشكل (3.12)

عندئذٍ تكون المعادلة التفاضلية التي تقابل هذه العناصر الثلاثة هي:

$$E(t) = L\frac{di}{dt} + R\,i(t) \qquad (3.10)$$

و يمكن حلها على أساس معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى كما فعلنا في البند (2.4) حاول ذلك، أو بطريقة فصل المتغيرات (كما يأتي) باعتبار أنّ المعادلة:

$$\frac{dt}{L} = \frac{di}{E(t) - R\,i(t)}$$

وبإجراء التكامل نحصل على: $\frac{t}{L}+c=-\frac{1}{R}\ln\left|E(t)-R\,i(t)\right|$ حيث إنّ c ثابت يمكن حسابه من الشرط الابتدائي: عندما $t=0$ إنّ $i=0$ والقوة الدافعة الكهربائية هي ثابتة ولتكن E_0،

فبالتعويض نحصل على: $c=-\frac{1}{R}\ln E_0$ ومنها نحصل على:

$-\frac{tR}{L}=\ln\frac{\left|E_0-R\,i\right|}{E_0}$ أي أنّ الحل: $\frac{E_0-R\,i}{E_0}=e^{-\frac{R}{L}t}$.

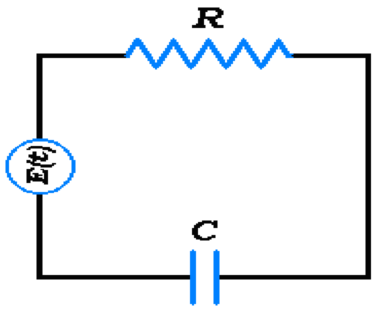
ومنه نحصل على معادلة التيار:

$$i(t)=\frac{E_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad (3.11)$$

عندما $t\to\infty$ ، فإنّ المعادلة (3.11) تصبح $R\,i(t)=E_0$ وهو ما يعرف بقانون أوم.

2. دارة كهربائية (مقاومة – متسعة)

تحتوي هذه الدارة المغلقة على: قوة دافعة كهربائية ومقاومة، ومتسعة فقط، كما مبين في الشكل (3.13).



الشكل (3.13)

عندئذٍ تكون المعادلة التفاضلية التي تقابل هذه العناصر الثلاثة هي:

$$E(t)=R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q(t) \qquad (3.12)$$

المعادلة (3.12) هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى يمكن حلها كما فعلنا في البند (2.4)، أو اعتبارها متجانسة، وحلها كما في الحالة الأولى (حاول بالطريقتين).

المثال (1): في دارة بسيطة تتألف من مقاومة 10 أوم ومحاثة حثها ($\frac{1}{2}$) هنري مربوطة على التوالي مع بطارية قوتها الدافعة الكهربائية 12 فولت. احسب التيار المار إذا علمت أنّ التيار الابتدائي هو صفر.

الحل: من المعادلة (3.10) نحصل على المعادلة الخطية:

$$12 = \frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10\, i(t), \qquad i(0) = 0$$

نجد عامل المكامل: $\mu(t) = e^{20t}$ **، ونضرب طرفي المعادلة التفاضلية فنحصل على:**

$\frac{d}{dt}(e^{20t} i) = 24e^{20t}$ **. بإجراء عملية التكامل نحصل على التيار:** $i(t) = \frac{6}{5} + ce^{-20t}$

وبالتعويض بالشرط الابتدائي $i(0) = 0$ **، نحصل على الثابت** $c = -\frac{6}{5}$ **. إذاً التيار:**

$$i(t) = \frac{6}{5}(1 - e^{-20t})$$

المثال (2): في دارة بسيطة تتألف من مقاومة 200 أوم ومتسعة سعتها 10^{-4} **فراد مربوطة على التوالي مع بطارية قوتها الدافعة الكهربائية 200 فولت. احسب كمية الشحنة الكهربائية** $q(t)$ **في أية لحظة** t **، إذا علمت أنّ** $q(0) = 0$ **. ثم احسب شدة التيار الكهربائي بعد مضي** 0.02 **ثانية.**

الحل: من المعادلة (3.12) نحصل على المعادلة الخطية:

$$200 = 200\frac{dq}{dt} + \frac{1}{10^{-4}} q(t) .$$

وبالقسمة على 200 والتبسيط نحصل على: $\frac{dq}{dt} + 50q(t) = 1$ **وهي عبارة عن معادلة خطية من الرتبة الأولى حلها (حقق ذلك):** $q(t) = \frac{1}{50} + ce^{-50t}$ **. وبالتعويض في الشرط الابتدائي** $q(0) = 0$ **نحصل على قيمة الثابت** $c = -\frac{1}{50}$ **، أي أنّ كمية الشحنة هي:**

$$q(t) = \frac{1}{50}\left(1 - e^{-50t}\right) .$$

وبالاشـتقاق نحصـل علـى التيـار: $i(t)=\frac{dq}{dt}=e^{-50t}$. وعليـه يكـون التيـار بعـد 0.02 ثانيـة هـو $i=e^{-1}$ أمبير.

3.4 تطبيقات في علم الأحياء (النمو والاضمحلال)

Application in Biology (Growth and Decay)

نتناول في هذا البند بعض تطبيقات علم الأحياء، مركّزين بشكل خاص على المسائل التي تتعلق بنمو أو اضمحلال عينـة مـن مجتمـع معين. ينسـب هـذا العمـل الـى الاقتصـادي البريطـاني تومـاس مـالثوس (Thomas Malthus) سنة 1798م صاحب الفرضية التي تنص على أنّ معدل تغير أي عينـة يتناسب تبع عدد العينة.

إذا فرضا أنّ عينة من مجتمع ما عددها $P(t)$ فإنّ معدل تغير هذه العينـة بالنسبة للزمن هو $\frac{dP}{dt}$ ويتنـاسب مع عدد العينة $P(t)$، أي أنّ : $\frac{dP}{dt}\propto P(t)$. ومنها نحصل على:

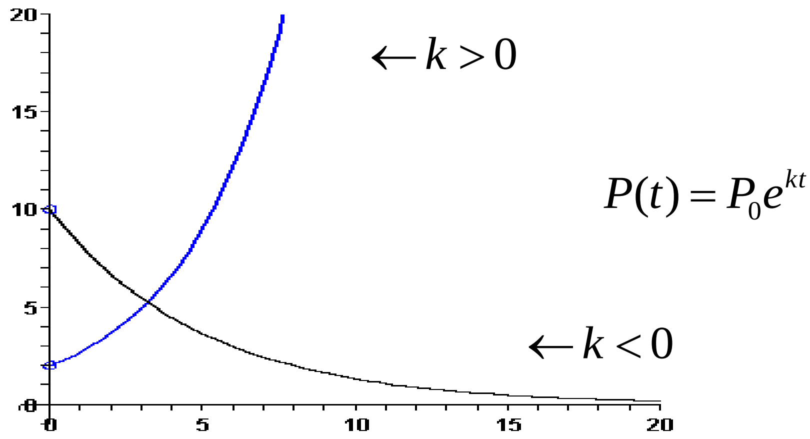
$$\frac{dP}{dt}=kP(t) \qquad (3.13)$$

حيث إنّ k ثابت التناسب. المعادلة التفاضلية (3.13) هي من الرتبة الأولى يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات، كما يأتي: $\frac{dP}{P}=k\,dt$ ، وبإجراء التكامل، نحصل على: $\ln P=kt+c_1$ حيث c_1 ثابت اختياري. ومنها نحصل على: $P(t)=ce^{kt}$ ، حيث $c=e^{c_1}$ هي ثابت.

إذا فرضنا أنّ عدد العينة في البدء هو P_0، أي قبل بدء التجربة، أي عندما $t=0$، فإنّ المعادلة السابقة تصبح: $P_0=c$ وعليه إنّ حل المعادلة (3.13)، هو:

$$P(t)=P_0e^{kt} \qquad (3.14)$$

إذا كان $k<0$، فإنّ المعادلة (3.14) تمثل اضمحلالاً، وإذا كان $k>0$، فإنّها تمثل نمواً، كما موضح في الشكل (3.14):



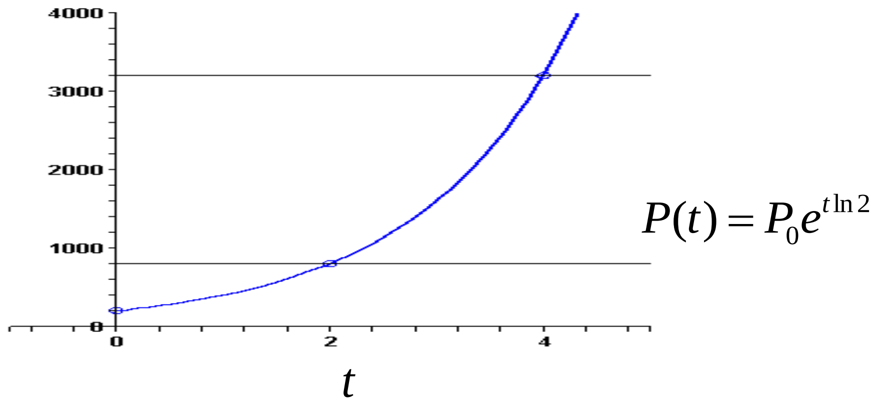
الشكل (3.14)

المثال (1): عينة بكترية تزداد بمعدل يتناسب مع عدد نمو خلايا العينة الموجودة في أي وقت. وبعد ساعتين أصبح عدد خلايا العينة أربعة أمثال، فبعد كم ساعة يصبح عدد خلايا العينة 16 ضعفاً؟

الحل: نبدأ من المعادلة (3.14): $P(t) = P_0 e^{kt}$ **، حيث إن** P_0 **عدد خلايا العينة قبل بدء التجربة. عندما** $t = 2$ **ساعات ، إنّ** $P(2) = 4P_0$ **، ومنها نحصل على:** $4P_0 = P_0 e^{2k}$ **، أي أنّ :** $k = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln 2$ **. وبذلك يكون:** $P(t) = P_0 e^{(\ln 2)\,t}$ **.**

نلاحظ أنّ k **موجبة لإنّ المسألة تمثل نمواً، أي: زيادة في عدد خلايا العينة، انظر الشكل (3.15).**

الآن، يصبح عدد العينة 16 ضعفاً عندما يكون: $16P_0 = P_0 e^{(\ln 2)\,t}$ **ومنه نحصل على الزمن اللازم، وهو** $t = \frac{\ln 16}{\ln 2} = 4$ **ساعة.**



الشكل (3.15)

نسمع كثيراً من خلال الأجهزة المرئية والمسموعة (التلفاز او المذياع) خبراً حول العثور على عظم متحجر عمره يقدر بملايين السنين، كيف تم تقدير ذلك العمر؟ سنحاول الاجابة عن ذلك في هذا الجزء من البند.

يوجد في الطبيعة عناصر مشعة تفقد من مادتها المشعة الأصلية بمرور الزمن، وعندما يكون زمن فقدان جزء معين من المادة الأصلية طويلاً تكون المادة أكثر استقراراً. مثلاً: اليورانيوم مادة مشعة تفقد من مادتها المشعة جزءاً ضئيلاً بزمن طويل يقدر بمئات السنين.

يدعى "زمن نصف- العمر" (Half - life time) لمادة مشعة معينة بانه هو الزمن اللازم كي تفقد تلك المادة نصف كميتها وتتحول الى صيغة أخرى. في العظام يقدر زمن نصف العمر لمادة الكربون ^{14}C هو **5600** سنة. أنجزهذا الاكتشاف الكبير العالم الكيميائي ويلارد ليبي (Willard Libby) سنة 1950م الحاصل على جائزة نوبل في الكيمياء سنة 1960م. الجدول الآتي يبين زمن نصف- العمر لبعض المواد المشعة:

جدول زمن نصف - العمر لبعض المواد المشعة

المادة	الرمز الذري	زمن نصف- العمر سنة	المادة	الرمز الذري	زمن نصف- العمر سنة
المنيوم	^{26}Al	7.4×10^{5}	بولونيوم	^{209}Po	100
بريليم	^{10}Be	1.51×10^{6}	بولونيوم	^{210}Po	138 days
كربون	^{14}C	5600	رادون	^{222}Rn	3.82 days
كلورين	^{36}Cl	3.01×10^{5}	راديوم	^{226}Ra	1700
اليود	^{131}I	8.05 days	ثوريوم	^{230}Th	75,000
البوتاسيوم	^{40}K	$1.27.4\times10^{9}$	يورانيوم	^{238}U	4.51×10^{9}

المثال (2): عثر على عظم متحجر يحتوي على $\frac{1}{1000}$ من الكربون ^{14}C المقرر وجوده في حالة الحياة. قدر عمر المتحجر.

الحل: نبدأ من المعادلة (3.14): $P(t)=P_0e^{kt}$ ، حيث إن P_0 تمثل كمية الكربون ^{14}C المقرر وجوده في حالة الحياة.

عندما $t=5600$ سنة، إنّ $P(5600)=\frac{1}{2}P_0$ ، ومنها نحصل على قيمة k بحل المعادلة:

$\frac{1}{2}P_0=P_0e^{5600\,k}$ ، أي أنّ : $k=-\frac{\ln 2}{5600}=-0.00012378$. إذاً:

$$P(t)=P_0e^{-0.00012378t}$$

نلاحظ أنّ k سالبة لأنّ المسالة تمثل اضمحلالاً. الآن عندما $P(t)=\frac{1}{1000}P_0$ ، نحصل على:

$\frac{1}{1000}P_0=P_0e^{-0.00012378t}$ ومنه نحصل على الزمن اللازم، وهو:

$t=\frac{\ln 1000}{0.00012378}\approx 55{,}800$ سنة .

> **المثال (3):** مفاعل ذري يحول اليورانيوم المستقر النسبي ^{238}U الى نظير البلاتينيوم **239** . وجد بعد **15** سنة أن **% 0.043** من الكمية الأصلية للبلاتينيوم P_0 قد اضمحلت. جد زمن نصف- العمر لنظير البلاتينيوم إذا علمت أنّ معدل التغير يتناسب مع الكمية المتبقية.

الحل: نفرض أنّ $P(t)$ ترمز الى كمية البلاتينيوم المتبقية عند أي زمن t . نبدأ من المعادلة (3.14):

أي $P(t)=P_0e^{kt}$.

إذا كان *0.043%* من الكمية الأصلية P_0 قد اضمحلت، فإنّ *99.957%* من الكمية الأصلية P_0 قد تبقى. أي أنّ : $0.99957\ P_0=P_0e^{15k}$ ومنها نحصل على قيمة الثابت:

$k=\frac{1}{15}\ln 0.99957=-0.00002867$. إذاً المعادلة تصبح:

$$P(t)=P_0e^{-0.00002867t}$$

نلاحظ أنّ k سالبة لأنّ المسالة تمثل اضمحلالاً. إنّ زمن نصف – العمر يتم عندما تكون:

$P(t)=\frac{1}{2}P_0$ ، ومنها نستنتج أنّ: $\frac{1}{2}P_0=P_0e^{-0.00012378t}$ ومنه نحصل على الزمن اللازم،

وهو: $t=\frac{\ln 2}{0.000012378}\approx 24{,}180$ سنة .

3.5 تطبيقات في الكيمياء (Application in Chemistry)

نتناول في هذا البند بعض تطبيقات الكيمياء. سوف نركز على مسائل الخلط (Mixture problems) بين محلولين مختلفين في التركيز ومسائل البرودة (Cooling problems). سنبدأ بالمسألة المتعلقة بـ "قانون نيوتن في التبريد": ليكن لدينا جسم درجة حرارته هي $T(t)$ درجة فهرنهايت $\left(T(t)^{o}F\right)$ عند زمن معين t، بالطبع إنّ معدل تغيّر درجة حرارة الجسم $T(t)$ بالنسبة للزمن t هو $\frac{dT}{dt}$.

نفرض أنّ درجة حرارة الوسط المحيط بالجسم هي الثابت $T_1{}^{o}F$ (درجة فهرنهايت). إنّ قانون نيوتن في التبريد ينص على: معدل تغيّر درجة حرارة الجسم $T(t)$ بالنسبة للزمن t يتناسب مع حاصل الفرق بين درجة حرارة الجسم $T(t)$ ودرجة حرارة الوسط المحيط بالجسم. أي أنّ:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_1)$$

حيث k ثابت التناسب.

المعادلة السابقة من الرتبة الأولى ويمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات، كما هو موضح:

$$\frac{dT}{(T - T_1)} = k dt$$

بإجراء عملية التكامل نحصل على: $Ln|T - T_1| = kt + c_1$ حيث إنّ c_1 ثابت التكامل. ومنها نحصل على:

$$T = T_1 + ce^{kt} \qquad (3.15)$$

حيث إنّ $c = e^{c_1}$ هي ثابت.

المثال (1): لتكن درجة حرارة غرفة عند البدء، أي عندما $t = 0$ ، هي $66^{o}F$. بعد ساعتين اثنتين أصبحت درجة حرارة الغرفة $63^{o}F$. كم تصبح درجة الحرارة بعد **10** ساعات من البدء، إذا علمت إنّ درجة حرارة الوسط المحيط هي $32^{o}F$؟

الحل: نبدأ من المعادلة (3.15) ، وبالتعويض بالمعطيات نجد أنّ الحل هو: $T = 32 + ce^{kt}$

وبالتعويض بالشرط الابتدائي $T(0) = 66$ ، نحصل على: $66 = 32 + ce^{k(0)}$

أي أنّ الثابت: $c = 34$ ، ومنها يصبح الحل: $T = 32 + 34e^{kt}$.

الآن عندما $t=2$ **، إنّ** $T=63$**، ومنها نحصل على:** $63=32+34e^{2k}$ **وبحلها**

نحصل على قيمة الثابت: $k=\frac{1}{2}\ln\frac{31}{34}=\frac{1}{2}\ln 0.911765=-0.046187$

إذاً الحل هو:

$$T=32+34e^{-0.046187t}$$

وبعد 10 ساعات تكون درجة الحرارة:

$$T=32+34e^{-0.046187(10)}=53.4\ ^{o}F\ .$$

نتناول الآن مسائل الخلط بين محلولين مختلفين في التركيز.

المثال (2): برميل يحتوي على 200 جالون من ماء مذاب فيه 40 رطلاً من الملح ، عند لحظة معينة سمحنا لمحلول آخر من المادة الكيمياوية نفسها ولكن بتركيز يساوي رطلين اثنين لكل غالون بأن يتدفق الى البرميل من الأعلى بمعدل 5 غالونات في الدقيقة. خلط المحلولان جيداً وسمحنا للخليط بالخروج من الجهة السفلى للبرميل بمعدل خروج يساوي معدل الدخول. احسب كمية الملح في المحلول عند أية لحظة t **. ما كمية الملح بعد 20 دقيقة؟ وما كمية الملح بعد زمن طويل جداً؟ فسر ذلك مع الرسم.**

الحل: لتبسيط المسألة وتحويلها الى صيغة معادلة تفاضلية لاحظ الشكل (3.16)

نفرض أنّ كمية الملح في المحلول عند أية لحظة t **تساوي** $A(t)$ **. فعليه يكون:**

- تركيز المحلول الأصلي (قبيل بدء التجربة) = $\frac{40}{200}=\frac{1}{5}$ **رطل / غالون.**

- تركيز المحلول الداخل = 2 رطل / غالون وهو اكبر من تركيز المحلول الأصلي.

- معدل دخول المحلول = معدل خروج المحلول = 5 غالونات / دقيقة.

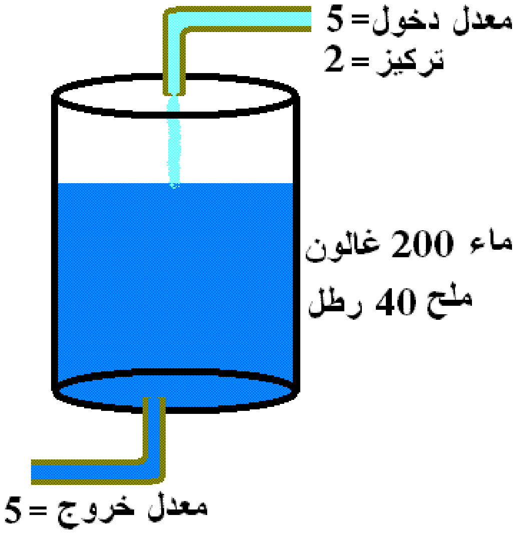
- تركيز المحلول عند الخروج هو متغير ويعتمد على الزمن t **ويساوي** $\frac{A(t)}{200}$ **رطل / غالون.**

- معدل تغيّر كمية الملح في البرميل بالنسبة للزمن t **يساوي** $\frac{dA}{dt}$ **.**

- معدل دخول كمية الملح = معدل دخول المحلول $\times$ **التركيز = 5** $\times$ **2 = 10 أرطال**

- معدل خروج كمية الملح = معدل خروج المحلول $\times$ **التركيز = 5** $\times$ $\frac{A(t)}{200}$ **رطل**

- معدل تغيّر كمية الملح في البرميل = معدل دخول كمية الملح – معدل خروج كمية الملح



الشكل (3.16)

إذاً:

$$\frac{dA}{dt} = 10 - \frac{5A}{200} = 10 - 0.025A$$

أي أنّ :

$$\frac{dA}{dt} + 0.025A = 10$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى، فيها مُعَامل المكامل هو: $\mu(t) = e^{0.025t}$

وعندئذٍ يكون: $(e^{0.025t} A)' = 10\, e^{0.025t}$.

إذاً الحل العام هو: $A(t) = 400 + ce^{-0.025t}$.

الآن عندما $t = 0$ إنّ $A(0) = 40$ ، ومنها نحصل على قيمة الثابت: $c = -360$.

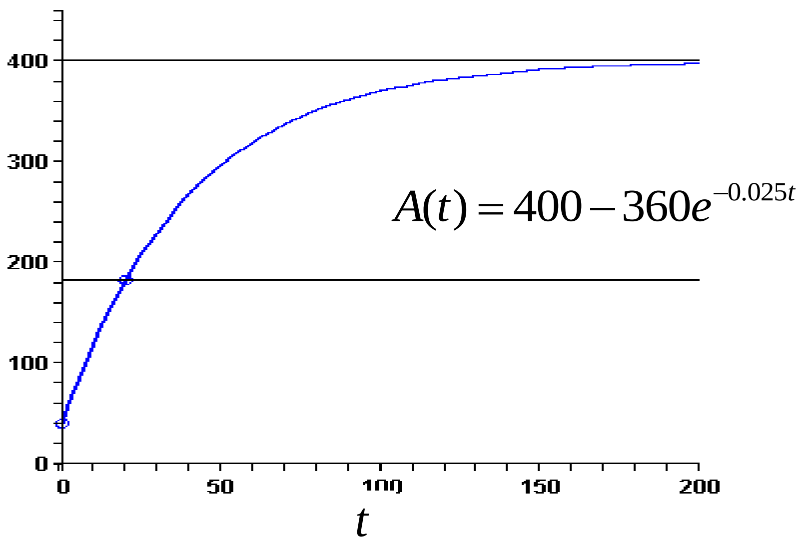
إذاً كمية الملح عند أي زمن t هي:

$$A(t) = 400 - 360e^{-0.025t} .$$

و كمية الملح بعد 20 دقيقة هي:

$$A(t) = 400 - 360e^{-0.025(20)} = 400 - 360(e^{-0.5}) = 182.438 .$$

الآن، عندما $t \to \infty$ ، إنّ $e^{-0.025t} \to 0$. فعليه إنّ كمية الملح بعد زمن طويل جداً هو **400** رطل. وهذا الجواب منطقي لإنّ البرميل يحتوي على **200** غالون ماء، وبعد زمن طويل يكون التركيز **2** رطلي ملح لكل غالون، أي أنّ الجواب مطابق. انظر الشكل (3.17):



الشكل (3.17)

نناقش فيما يأتي مسائل الخلط في حالة كون معدل دخول المحلول لا يساوي معدل خروج المحلول.

المثال (3): أعد حل المثال (2) بالمعطيات نفسها ولكن معدل دخول المحلول 5.5 غالون / دقيقة يزيد عن معدل خروجه بمقدار $\frac{1}{2}$ غالون/دقيقة. ثم احسب كمية الملح بعد **50** دقيقة، وبعد **200** دقيقة.

الحل: معدل دخول المحلول = 5.5 غالون / دقيقة. ومعدل خروج المحلول = 5 غالون / دقيقة.

تركيز المحلول عند الخروج هو متغير ويعتمد على الزمن t يساوي $\frac{A(t)}{200 + 0.5t}$ رطل / غالون.

معدل دخول كمية الملح = معدل دخول المحلول $\times$ التركيز = $11 = 2 \times 5.5$ رطلاً

معدل خروج كمية الملح = معدل خروج المحلول $\times$ التركيز = $5 \times \frac{A(t)}{200 + 0.5t}$ رطل

معدل تغيّر كمية الملح في البرميل = معدل دخول كمية الملح – معدل خروج كمية الملح

إذاً: $\frac{dA}{dt} = 11 - \frac{10A}{400 + t}$ ، أي أنّ :

$$\frac{dA}{dt} + \frac{10A}{400 + t} = 11$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى، فيها مُعَامل المكامل هو: $\mu(t) = (400+t)^{10}$

وعندئذٍ يكون: $\left((400+t)^{10} A\right)' = 11\,(400+t)^{10}$

إذاً الحل العام هو:

$$A(t) = 400 + t + c\,(400+t)^{-1}\ .$$

الآن عندما $t=0$ **إنّ** $A(0)=40$ **، ومنها نحصل على قيمة الثابت:** $c = -144000$

إذاً كمية الملح عند أي زمن t **هي:** $A(t) = 400 + t - \dfrac{144000}{400+t}$ **.**

كمية الملح بعد 50 دقيقة هي: رطل $A(t) = 400 + 50 - \dfrac{144000}{450} = 130$ **.**

أما كمية الملح بعد 200 دقيقة هي: رطل $A(t) = 400 + 200 - \dfrac{144000}{600} = 360$ **.**

المثال (4): أعد حل المثال (2) بالمعطيات نفسها ولكن معدل دخول المحلول 5 غالونات / دقيقة يقل عن معدل خروجه بمقدار 1 غالون/دقيقة. ثم احسب كمية الملح بعد 100 دقيقة.

الحل: معدل دخول المحلول = 5 غالون / دقيقة. ومعدل خروج المحلول = 6 غالونات / دقيقة.

تركيز المحلول عند الخروج هو متغير ويعتمد على الزمن t **يساوي** $\dfrac{A(t)}{200-t}$ **رطل / غالون.**

معدل دخول كمية الملح = معدل دخول المحلول × التركيز = 5 × 2 = 10 رطل

معدل خروج كمية الملح = معدل خروج المحلول × التركيز = 6 × $\dfrac{A(t)}{200-t}$ **رطل**

معدل تغيّر كمية الملح في البرميل = معدل دخول كمية الملح – معدل خروج كمية الملح

إذاً: $\dfrac{dA}{dt} = 10 - \dfrac{6A}{200-t}$ **، أي أنّ :** $\dfrac{dA}{dt} + \dfrac{6A}{200-t} = 10$ **وهي معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى، فيها مُعَامل المكامل هو:** $\mu(t) = (200-t)^{-6}$ **وعندئذٍ يكون الحل العام هو:**

$$A(t) = 2(200-t) + c\,(200-t)^6 = 400 - 2t + c\,(200-t)^6\ .$$

الآن عندما $t=0$ **إنّ** $A(0)=40$ **، ومنها نحصل على قيمة الثابت:**

$$c = -\frac{360}{(200)^6} = -5.625\times 10^{-12}$$

إذاً كمية الملح عند الزمن t **هي:** $A(t) = 400 - t - 5.625\times 10^{-12}(200-t)^6$ **.**

أخيراً، كمية الملح بعد 100 دقيقة هي:

رطل $A(t)=400-100-5.625=294.375$ **.**

3.6 تطبيقات المعادلات التفاضلية غير الخطية (Applications of nonlinear DE)

تناولنا في هذا الفصل الدور المهم للمعادلات التفاضلية وتطبيقاتها المتنوعة في مجالات العلوم كافة. لكن لاحظنا أنّ هذه التطبيقات عبارة عن معادلات تفاضلية خطية يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات أو على اساس أنّها خطية غير متجانسة. نتناول في هذا البند بعض تطبيقات المعادلات التفاضلية غير الخطية وبخاصة: مسارات الطائرات والنمو السكاني، واطلاق الصواريخ أو مركبات الفضاء.

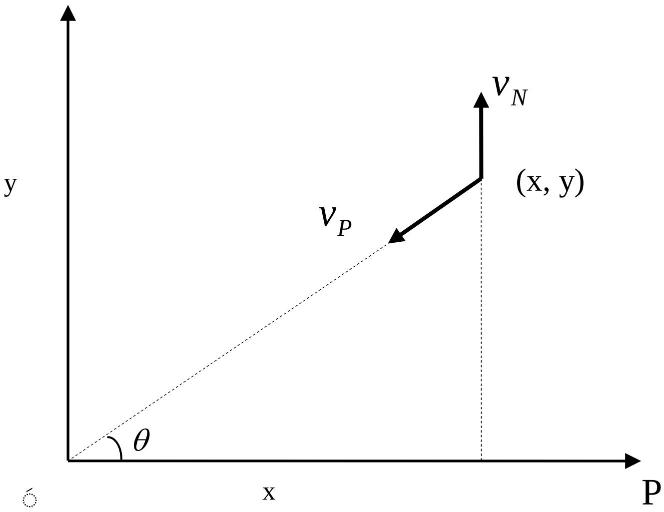
3.6.1: مسارات الطيران

من المعروف أنّ مسارات الطيران هي عبارة عن خطوط مستقيمة، ولكن هذا ليس واقع الحال حيث إنّ الطائرات تتأثر بسرعة و إتجاه الرياح فتتغير مساراتها إلى منحنيات. وسنبين هذا في المثال الآتي:

المثال (1): أقلعت طائرة من المطار P باتجاه المطار Q، الذي يبعد 800 كم باتجاه غرب المطار P، بسرعة ثابتة مقدارها $v_P=500$ كم / ساعة. فاذا كانت الطائرة تسيردوماً باتجاه المطار Q و كانت سرعة الريح تساوي $v_N=100$ كم / ساعة باتجاه الشمال، جد الدالة $y=f(x)$ التي تمثل المسقط على الأرض لمسار الطائرة؛ لاحظ الشكل (3.19) .

الحل: ليكن المسار المفترض $\overleftrightarrow{QP}$ يقع على المحور- x ، حيث تمثل Q نقطة الأصل $(0,0)$ و P النقطة $(0,800)$. وعليه ستكون مركبات سرعة الطائرة على الأرض بالنسبة للاحداثيات x و y ؛ لاحظ الشكل (3.18) ؛ كالاتي :

$$\frac{dx}{dt}=-v_P\cos\theta \quad , \quad \frac{dy}{dt}=-v_P\sin\theta+v_N$$



الشكل (3.18)

ومنها نستنتج أنّ مسار مسقط الطائرة على الارض يحقق المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{1}{v_P\ x}[v_P\ y-v_N\ \sqrt{x^2+y^2}]$$

بالتعويض عن القيمتين $v_P=500$ **و** $v_N=100$ **و تبسيط المعادلة نحصل على:**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{1}{5}\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

وهي معادلة تفاضلية غير خطية من الرتبة الأولى لكنها متجانسة. بذلك يمكن حلها باستخدام التعويض $y=ux$ **و** $y'=u+u'x$ **في المعادلة السابقة لنحصل على:**

$$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\int\frac{dx}{5x}$$

و بالتعويض بالدوال المثلثية يؤول التكامل الأيسرالى:

$$\int\sec\theta\ d\theta=\ln(\tan\theta+\sec\theta)=\ln(u+\sqrt{1+u^2})$$

ومنه نحصل على: $\ln(u+\sqrt{1+u^2})=-\frac{1}{5}\ln x+c$ **. وحسب القيمة الابتدائية:** $y(800)=0$

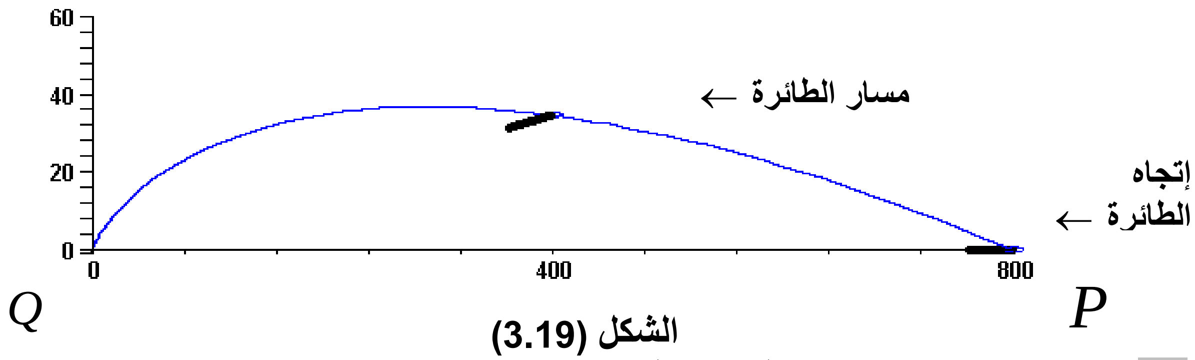
يكون لدينا $u(800)=\frac{y(800)}{800}=0$ **فنحصل على قيمة الثابت** $c=\frac{1}{5}\ln 800$ **و بتعويضها في معادلة الحل وتبسيطها نحصل على:**

$$u=\frac{1}{2}\left((\frac{x}{800})^{\frac{-1}{5}}-(\frac{x}{800})^{\frac{1}{5}}\right)$$

و أخيرا نحصل على الحل الصريح:

$$y=\frac{x}{2}\left((\frac{x}{800})^{\frac{-1}{5}}-(\frac{x}{800})^{\frac{1}{5}}\right)$$

و الشكل (3.19) يمثل مسار الطائرة بالنسبة للأرض.



الشكل (3.19)

3.6.2: النمو السكاني - المعادلة المنطقية (Logistic equation)

تناولنا في البند (3.4) المعادلة التفاضلية $\frac{dP}{dt}=kP$ التي تعتبر نموذجا رياضيا لتطبيقات متعلقة بنمو أو اضمحلال مجتمعات معينة. في الحقيقة، يستخدم هذا النموذج لتقدير النمو الطبيعي للمجتمعات، وهو يعتمد على معدلات ثابتة للزيادة والنقصان. أي أن $k=\beta-\alpha$ حيث β ثابت تناسب الزيادة و α ثابت تناسب النقصان. في نماذج أكثر عمومية قد لا تكون قيم β و α ثابتة بل تتغير مع الزمن و تعتمد على عدد المجتمع $P(t)$.

المثال الآتي يتضمن نموذجا تكون فيه β دالة خطية متناقصة تعتمد على $P(t)$ و α قيمة ثابتة، أي:

$$\frac{dP}{dt}=(\beta_1-\beta_2P-\alpha)P$$

وبفرض $m=\frac{\beta_1-\alpha}{\beta_2}$, $k=\beta_2$ نحصل على المعادلة المنطقية الآتية:

$$\frac{dP}{dt}=k(m-P)P \qquad (3.16)$$

و يمكن حلها بفصل المتغيرات لنحصل على: $\int\frac{dP}{P(m-P)}=\int k\ dt$. باستخدام طريقة الكسور الجزئية للتكاملات تؤول المعادلة السابقة الى: $\frac{1}{m}\int(\frac{1}{P}+\frac{1}{m-P})dP=\int k\ dt$.

وبإجراء التكامل نحصل على: $\frac{1}{m}\ln\frac{P}{m-P}=kt+c_1$ ، وبتبسيطها نحصل على معادلة الحل بالمَعْلَمَة c:

$$\frac{P}{m-P}=ce^{mkt}$$

و بتعويض الشروط الابتدائية نحصل على قيمة c و منها معادلة الحل:

$$\frac{P}{m-P}=\frac{P(0)}{m-P(0)}e^{mkt} \quad . \qquad (3.17)$$

المثال (2): إذا كان عدد سكان دولة معينة في عام 1950م هو 40 مليون نسمة، و قد كان معدل النمو السنوي في حينه 0.5 مليون نسمة. وفي العام 2000 م تضاعف العدد ليصبح 80 مليون بمعدل نمو سنوي 0.75 لتلك السنة. المطلوب تخمين عدد السكان في عام 2020 باعتماد المعادلة (3.16). ماذا يحصل لعدد السكان بمرور السنين؟

الحل: بما أنّه يتعين علينا اعتماد المعادلة (3.16) نموذجاً للمسألة فيجب إيجاد قيمتي k , m أولاً.

من المعلومات التي لدينا باستخدام المعادلة نفسها نحصل على المعادلتين:

$$0.5=k(m-40)(40)$$
$$0.75=k(m-80)(80)$$

وبحلهما آنيا نحصل على القيمتين: $m=200$ و $k=\frac{1}{12800}$.

نفرض أنّ الدالة $P(t)$ تمثل عدد السكان في العام t ، حيث $0\le t$. ونعتبر العام $t=0$ ممثلا للسنة 2000 م ، عليه ستكون لدينا مسألة القيمة الابتدائية:

$$\frac{dP}{dt}=k(m-P)P \quad ، \quad P(0)=80$$

بالتعويض في معادلة حلها (3.17) عن قيم k , m و الشرط الابتدائي $P(0)=80$ نحصل على

معادلة الحل: $\frac{P}{200-P}=\frac{2}{3}e^{\frac{1}{64}t}$ ،

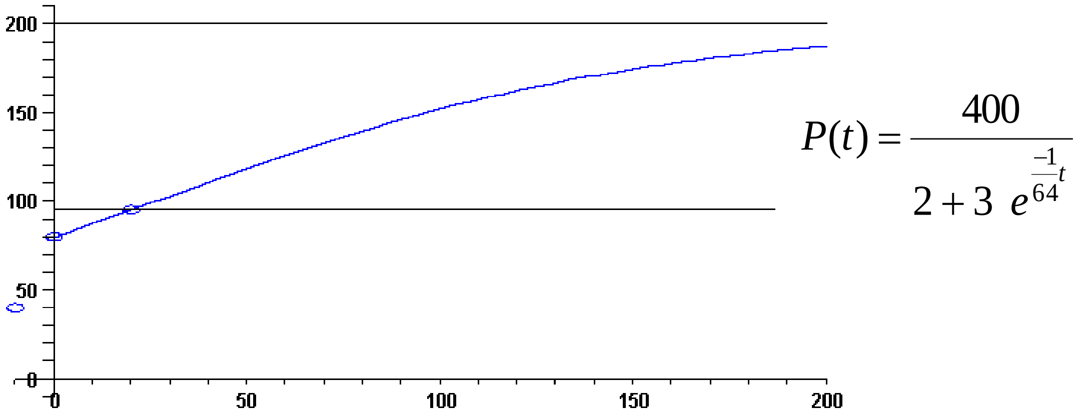
ومنها نحصل على الحل الصريح:

$$P(t)=\frac{400}{2+3\ e^{\frac{-1}{64}t}} \qquad (3.18)$$

وبالتعويض عن t في المعادلة (3.18) بالقيمة 20، نحصل على عدد السكان المتوقع في العام 2010م:

$P(60) = 95.355\ 089$. أي 95.4 مليوناً تقريبا .

أما عن عدد السكان بمرور السنين فسيؤول الى القيمة الثابتة 200 مليون، كما في الشكل (3.20) :



الشكل (3.20)

3.6.3: سرعة الهروب (Escape velocity)

لا حظنا في البند (3.2) أن الجسم الساقط سقوطاً حراً يكون على ارتفاع قريب من سطح الارض، أي أنّ بعد الجسم عن سطح الارض صغير جداً بالنسبة الى نصف قطر الكرة الارضية R .

من جانب آخر، في حالة كون بعد الجسم عن سطح الارض كبيراً جداً بالنسبة الى نصف قطر الكرة الارضية R، مثلاً: عند اطلاق الصواريخ أو مركبات الفضاء، عندئذٍ نستخدم قانون نيوتن الثاني في الحركة مع قانونه العام في الجاذبية (Universal law of gravitation) لاشتقاق المعادلة التفاضلية المطلوبة. يمكننا استخدام حل تلك المعادلة التفاضلية لحساب السرعة الصغرى التي تسمى بسرعة الهروب؛ وهي السرعة الصغرى التي يحتاجها الصاروخ كي يتحرر من الجاذبية الارضية وينطلق نحو الفضاء الخارجي.

المثال (3):

اطلق صاروخ افقياً نحو الاعلى من على سطح الارض. إذا اعتبرنا الاتجاه الموجب هو نحو الاعلى وأهملنا مقاومة الهواء فإنّ المعادلة التفاضلية التي تقابل الحركة بعد اشتعال المحروقات هي:

$$-k\frac{mM}{x^2} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

أي أنّ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{M}{x^2}, \qquad (3.19)$$

حيث إنّ k هي ثابت التناسب و $x(t)$ هي بعد الصاروخ عن مركز الارض و M هي كتلة الارض، و m هي كتلة الصاروخ. لحساب الثابت k ، دعنا نستخدم الحقيقة عندما $x = R$ ، فنحصل على:

$k\frac{mM}{R^2} = mg$ ، أي أنّ $k = \frac{gR^2}{M}$. وعليه فإنّ المعادلة التفاضلية (3.19) تصبح:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{R^2}{x^2}. \qquad (3.20)$$

على الرغم من أنّ المعادلة التفاضلية السابقة هي ليست من الرتبة الأولى إلا أنه يمكننا اعادة كتابتها باستخدام قاعدة السلسلة للمشقة وتعويضها في التعجيل كما يأتي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

عليه فإنّ المعادلة (3.20) تصبح من الرتبة الاولى:

$$v\frac{dv}{dx} = -g\frac{R^2}{x^2}.$$

التي يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات، كما يلي: $\int vdv = -gR^2\int x^{-2}dx$ فنحصل على:

$$\frac{1}{2}v^2 = g\frac{R^2}{x} + c. \qquad (3.21)$$

إذا فرضنا السرعة هي $v = v_0$ عند انطلاق الصاروخ و $x \approx R$ عند تلك اللحظة، فعندئذٍ تكون القيمة التقريبية للثابت هي:

$$c = gR + \frac{1}{2}{v_0}^2$$

وبالتعويض عن الثابت c في المعادلة (3.21) نحصل على العلاقة بين بعد الصاروخ عن مركز الارض وسرعته:

$$v^2 = 2g\frac{R^2}{x} - 2gR + v_0$$

3.7 المخرجات التعليمية للفصل (Learning outcomes)

بعد الانتهاء من دراسة الفصل الثالث، يكون الطالب قد أتقن المخرجات التعليمية الآتية

1. تحديد المشاكل التي يمكن حلها باستخدام المعادلات التفاضلية الاعتيادية.
2. التعبير عن مشكلة معينة بصيغة معادلات تفاضلية من أجل حلها.
3. استخدام المعادلات التفاضلية لإيجاد عائلة منحنيات عمودية على عائلة معلومة.
4. استخدام المعادلات التفاضلية الخطية لحل مشاكل في: الفيزياء والأحياء، والكيمياء.
5. استخدام المعادلات التفاضلية غير الخطية لحل بعض المشاكل في الطيران والعلوم.
6. تقدير أهمية المعادلات التفاضلية من خلال تطبيقاتها في العلوم الأخرى.
7. المقدرة على استخدام القرص الممغنط المرافق للكتاب لمراجعة محتويات الكتاب و حساب كمية الشحنات و شدة التيار في الدرات الكهربائية.

تمارين الفصل الثالث

جد معادلة المسارات المتعامدة لعائلة المنحنيات المعطاة في المسائل من 1- 9 ، مع رسم لبعض هذه المنحنيات والمسارات المتعامدة معها معاً:

.1 $x^2 + 4y^2 = c_1$ **.2** $y = c_1 e^{-x}$

.3 $y^2 = c_1 x$ **.4** $y = c_1 e^{x}$

.5 $x^2 + y^2 = 2c_1 y$ **.6** $(x - c_1)^2 + (y - c_1)^2 = 2{c_1}^2$

.7 $y^2 = 2x + c_1$ **.8** $y^2 - mx^2 = c_1$

.9 $y = mx + c_1$

جد المسارات العمودية على العوائل في المسائل من 10- 18 :

.10 $y = \dfrac{x}{1 + c_1 x}$ **.11** $y = \dfrac{1}{c_1 + x}$

.12 $y = \dfrac{c_1 - x}{c_1 + x}$ **.13** $y = \ln|x| + c_1$

.14 $r = c_1(1 + \cos\theta)$ **.15** $r^2 = c_1 \sin 2\theta$

.16 $\ln r = c_1\theta$ **.17** $r = c_1 \sec\theta$

.18 $r = \dfrac{c_1}{1 + \cos\theta}$

.19 من خلال التجارب العملية نجد أنّ خطوط الكهربائية لقوة شحنتين متعاكستين لهما الشدة نفسها عند النقطتين $(-1,0)$ و $(1,0)$ هي الدوائر التي تمر من تلك النقطتين. بين أنّ معادلة عائلة هذه الدوائر هي : $x^2 + (y - c_1)^2 = 1 + {c_1}^2$ ثم اثبت أنّ خطوط تساوي الجهد (المسارات المتعامدة على عائلة الدوائر الأولى) هي الدوائر :

$$(x + c_2)^2 + y^2 = {c_2}^2 - 1 .$$

في المسائل من 20- 27 كوّن المعادلة التفاضلية التي تمثل الدارات الكهربائية، البسيطة المغلقة والمربوطة على التوالي، ثم جد الحل وفق الشروط المعطاة:

20. بطارية قوتها الدافعة الكهربائية *24* فولتاً مربوطة على التوالي بدارة كهربائية تحوي متسعة سعتها **1** فراد ومقاومة مقدارها *20* أوم. احسب كمية الشحنة الكهربائية $q(t)$ في أية لحظة t ، اذا علمت أنّ $q(0)=0$. ثم احسب شدة التيار بعد t من الزمن.

21. دارة كهربائية (مقاومة – محاثة) فيها محاثة حثها **0.1** هنري ومقاومة **50** أوم مربوطة على التوالي مع بطارية قوتها الدافعة الكهربائية **30** فولت. احسب شدة التيار الكهربائي في أية لحظة t علماً أنّ: $i(0)=0$ (أمبير) ، ثم احسب شدة التيار الكهربائي عندما $t \leftarrow \infty$.

22. دارة كهربائية (مقاومة – محاثة) فيها $R=4\,\Omega$ ، $L=0.1H$ ، $E(t)=20V$ ، وكان التيار يساوي صفراً عند البدء. احسب التيار المار في الدارة عند أي زمن t .

23. دارة كهربائية (مقاومة – متسعة) فيها $R=5\Omega$ ، $C=\frac{1}{50}F$ وبطارية قوتها الدافعة الكهربائية $E(t)=100\,v$ ، وكانت المتسعة غير مشحونة في البداية . احسب التيار في الدارة لجميع قيم $t \geq 0$.

24. دارة (مقاومة - محاثة) فيها بطارية قوتها الدافعة الكهربائية $E(t)=(10\sin 4t)\,V$ و $R=2\,\Omega$ ، $L=(2/3)\,H$ ، ولا يوجد انسياب للتيار في البداية . احسب قيمة التيار عندما $0 \leq t$.

25. دارة كهربائية (مقاومة - متسعة) فيها المقاومة $R=2\,\Omega$ ، $C=\frac{1}{8}F$ ، والقوة الدافعة الكهربائية $E(t)=(10\cos 3t)\,V$ وكانت $q(0)=1$ (كولوم) . احسب التيار في الدارة عندما $0 \leq t$.

26. دارة كهربائية (مقاومة - متسعة) فيها $E(t)=0$ و $q(0)=5c$ ، احسب الشحنة الموجودة على المتسعة عندما $t \geq 0$. ماذا يحدث عندما $t \longrightarrow \infty$ ؟ هل هذا معقول؟

27. دارة كهربائية تتألف من مقاومة $50\,\Omega$ ومحاثة $L=0.02\,H$ مربوطة على التوالي مع بطارية قوتها الدافعة الكهربائية $E-50\,V$. احسب شدة التيار في الدارة بعد 0.01 ثانية.

28. إذا علمت أنّ التيار $i=i_0$ والقوة الدافعة الكهربائية $E=E_0$ عندما $t=0$ ، فاثبت أنّ حل المعادل (3.11) يصبح:

$$i(t)=\frac{E_0}{R}+\left(i_0-\frac{E_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

ماذا يحصل إذا كان $i(0)=i_0=0$.

المسائل من 29- 35 تمثل النمو أو الاضمحلال، كوّن المعادلة التفاضلية التي تمثل كل مسألة، ثم جد الحل مع الرسم:

29. جد نسبة المتبقي من مادة البولونيوم ^{209}Po بعد مرور 50 سنة، إذا علمت أنّ زمن نصف-العمر لمادة ^{209}Po هو 100سنة.

30. وجد تابوت خشبي متحجر مصنوع في زمن الفراعنة المصريين يحتوي على 63% من مادة الكربون ^{14}C في ذلك اليوم. قدر عمر التابوت؟

31. عينة من مجتمع تزداد بمعدل يتناسب مع عدد العينة الموجودة في أي وقت. بعد 5 سنوات أصبح عدد العينة ضعف العدد فبعد كم سنة يصبح العدد 3 أضعاف؟

32. إذا كان عدد خلايا الطحالب يتزايد بمعدل يتناسب مع العدد الموجود عند أية لحظة، فإذا وجد 5000 خلية طحلبية بعد عشرة أيام ، ووجد 6000 خلية طحلبية بعد 12 يوماً . حدد العدد الابتدائي الذي بدأت به المزرعة ، وجد زمن التضاعف لهذا النظام .

33. ليكن عدد خلايا بكترية في مزرعة يتزايد بمعدل يتناسب مع العدد الموجود بالمزرعة عند أية لحظة t ، فإذا كان العدد الأولي للخلايا البكترية يساوي 10 خلايا ، وكان زمن التضاعف 3 ساعات، جد عدد الخلايا البكترية الموجودة بالمزرعة بعد 24 ساعة.

34. في سنة 1980 كان عدد سكان مدينة معينة هو 10^5 نسمة ، وفي سنة 1990 أصبح العدد 13×10^4 نسمة ، بفرض صحة القاعدة أنّ عدد السكان يزداد بمعدل يتناسب مع عدد الأشخاص عند بدء قياس الزمن ، احسب عدد السكان المتوقع سنة 2000 واحسب متى يصبح 2×10^5 نسمة .

35. لتكن مستعمرات خلايا بكترية تتزايد بمعدل يتناسب مع العدد الموجود عند أية لحظة، فإذا بدأت إحدى المزارع بـ 500 خلية بكترية وبعد ست ساعات زاد العدد إلى 1500 خلية بكترية . كم يكون عدد الخلايا البكترية بعد مرور يوم كامل من لحظة البدء، ومتى يكون العدد مساوياً إلى 10^6 بكترية ؟

كوّن المعادلة التفاضلية التي تمثل مسائل الخلط من 36 - 39 ، ثم جد الحل وفق الشروط المعطاة مع الرسم:

36. برميل يحتوي على 1000 غالون ماء مذاب فيه 200 رطل ملح . عند لحظة معينة سمحنا لمحلول آخر من المادة الكيمياوية نفسها ولكن بتركيز يساوي رطلاً واحداً لكل غالون بأن

يتدفق الى البرميل من الأعلى بمعدل 50 غالوناً في الدقيقة. جد كمية الملح في البرميل عند أي زمن t ثم جد كمية الملح بعد 10 دقائق إذا علمت أنّ معدل الخروج مساوٍ لمعدل الدخول.

37. برميل يحتوي على 200 غالون ماء مذاب فيه 50 رطل ملح . عند لحظة معينة سمحنا لمحلول آخر من المادة الكيمياوية نفسها ولكن بتركيز يساوي 2 رطلين لكل غالون بأن يتدفق الى البرميل من الأعلى بمعدل 2 غالونين في الدقيقة. جد كمية الملح في البرميل عند أي زمن t ثم جد كمية الملح بعد 3 دقائق إذا علمت أنّ معدل الخروج مساوٍ لمعدل الدخول.

38. برميل يحتوي على 200 غالون ماء مذاب فيه 50 رطل ملح . عند لحظة معينة سمحنا لمحلول آخر من المادة الكيمياوية نفسها ولكن بتركيز يساوي 2 رطلين لكل غالون بأن يتدفق الى البرميل من الأعلى بمعدل 2 غالونين في الدقيقة. جد كمية الملح في البرميل عند أي زمن t ثم جد كمية الملح بعد 3 دقائق إذا علمت أنّ معدل الخروج يزيد على معدل الدخول بمقدار1 غالون في الدقيقة.

39. برميل يحتوي على 200 غالون ماء مذاب فيه 50 رطل ملح . عند لحظة معينة سمحنا لمحلول آخر من المادة الكيمياوية نفسها ولكن بتركيز يساوي 2 رطلين لكل غالون بأن يتدفق الى البرميل من الأعلى بمعدل 2 غالونين في الدقيقة. جد كمية الملح في البرميل عند أي زمن t ثم جد كمية الملح بعد 3 دقائق إذا علمت أنّ معدل الخروج يقل عن معدل الدخول بمقدار 3 غالونات في الدقيقة.

40. عدد سكان مدينة معينة في عام 1990م هو *14* مليون نسمة، و معدل النمو السنوي في حينه 0.3 مليون نسمة. وفي العام 2005 م تضاعف العدد ليصبح 28 مليوناً بمعدل نمو سنوي 0.5 لتلك السنة. المطلوب تخمين عدد السكان في عام 2020 باعتماد المعادلة (3.16). ماذا يحصل لعدد السكان بمرور السنين؟

41. تم قياس درجة حرارة قطعة كيك مسحوبة من فرن ساخن عند لحظة t، فوجد أنّ درجة الحرارة هي $300^o F$. وتم قياسها بعد ثلاث دقائق فوجد أنّ درجة الحرارة هي $200^o F$. جد درجة حرارة القطعة بعد t دقيقة، ثم احسب الزمن اللازم كي تصبح درجة حرارة الكيك تساوي درجة حرارة الغرفة نفسها $70^o F$؟

42. لنفترض طالباً يحمل فايروس الإنفلاونزا في كلية معزولة تتكون من 1000 طالب. و أنّ معدل انتشار الفيروس يتناسب مع عدد الطلبة الحاملين وغير الحاملين للفيروس. احسب عدد المصابين بالفيروس بعد مرور 6 أيام إذا علمت أنّ عدد المصابين بعد 4 أيام أصبح 50 طالباً.