الفصل الرابع

معادلات تفاضلية من الرتب العليا (Higher order DE)

4.1 مسائل القيم الابتدائية (Initial values problems)

لقد تناولنا في الفصل الأول البند (1.7) مسائل القيم الابتدائية (IVP) بشكل عام مع التركيزعلى مسألة القيمة الابتدائية للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى، نركز في هذا البند على المعادلات التفاضلية من الرتب العليا؛ الرتبة الثانية وأعلى.

تأمل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (4.1)$$

وفق الشروط:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad (4.2)$$

حيث إنّ $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ ثوابت حقيقية اختيارية معطاة.

تدعى المعادلتين (4.1) و (4.2) بمسألة القيم الابتدائية (IVP) من الرتبة n ، وتدعى قيم y ومشتقاتها حتى الرتبة $(n-1)$ عند النقطة x_0 ، أي: $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ بالشروط الابتدائية. في حالة الرتبة الثانية إنّ (IVP) تصبح:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, y') \qquad (4.3)$$

وفق الشرطين:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1 \qquad (4.4)$$

حيث إنّ $y_0,\ y_1$ معلومان.

عندما تكون المعادلة التفاضلية خطية، والتي ستكون محور اهتمامنا في هذا الفصل، فإنّ مسألة القيمة الابتدائية الخطية من الرتبة - n تأخذ الصيغة:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (4.5)$$

وفق الشروط:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad (4.6)$$

حيث إنّ $g(x)$ ، $a_1(x)$ ، $a_2(x)$ ،...، و $a_n(x)$ دوال متصلة تحتوي على المتغير المستقل x أو ثوابت، أي لا تحتوي على المتغير المعتمد y ، و $a_n(x) \neq 0$. وأنّ y ومشتقاتها كافة مرفوعة للأس **1**. وإنّ $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ ثوابت حقيقية اختيارية معطاة.

في حالة المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ، إنّ المسألة تصبح:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \qquad (4.7)$$

وفق الشرطين:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1 \qquad (4.8)$$

حيث إنّ $a_2(x) \neq 0$. و $y_0,\ y_1$ ثابتان اختياريان معلومان.

الأمثلة (1):

1. مسألة القيم الابتدائية : $\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+5y=e^x, \quad y(0)=0, y'(0)=1$

هي من الرتبة الثانية خطية غير متجانسة.

2. مسألة القيم الابتدائية: $\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{dy}{dx}-5y=0 \quad , y(1)=1,\ y'(1)=-1, y''(1)=0$

هي من الرتبة الثالثة خطية متجانسة.

3. مسألة القيمة الابتدائية:

$$\frac{d^4y}{dx^4}-5\frac{d^2y}{dx^2}+3xy=xe^x, \quad y(-1)=1,\ y'(-1)=-1, y''(-1)=0, y'''(-1)=2$$

هي من الرتبة الرابعة خطية غير متجانسة.

4. مسألة القيمة الابتدائية: $\frac{d^ny}{dx^n}-k\,y=0, \quad y(0)=1, y'(0)=-1,\ldots, y^{(n-1)}(0)=1$

حيث إنّ k ثابت، هي من الرتبة n خطية متجانسة.

المثال (2): ناقش حل مسألة القيم الابتدائية من الرتبة الثانية:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=0, \quad x\,(\frac{2\pi}{3})=-2,\ x'\,(\frac{2\pi}{3})=1$$

الحل: سبق أن بيّنا في المثال (4) من البند (1.6) أنّ الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=0$$

هوعائلة المنحنيات بمَعْلَمَتين إثنتين: $x(t)=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t$ على الفترة $\Re=(-\infty,\infty)$

(تحقق من ذلك). وعند التعويض بالشرطين الابتدائيين: $x'(\frac{2\pi}{3})=1$ و $x(\frac{2\pi}{3})=-2$

نحصل على :

$c_1=-2$ و $c_2=\frac{1}{3}$. وعليه إنّ حل مسألة القيم الابتدائية هو:

$$x(t)=-2_1\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t\,.$$

المبرهنة الآتية (لا داعي للبرهان) تحدد الشرط الكافي كي يكون لمسألة القيم الابتدائية (4.5) و (4.6) حل وحيد:

المبرهنة (4.1): (وجود حل وحيد)

ليكن $g(x)$ و $a_1(x)$ و $a_2(x)$ و ... ، و $a_n(x)$ دوال متصلة على الفترة I ، وليكن $a_n(x)\neq 0$ لجميع قيم x التي تنتمي الى تلك الفترة. إذا كانت $x=x_0$ أية نقطة تنتمي الى الفترة I ، فيوجد حل $y(x)$ لمسألة القيم الابتدائية (4.5) و (4.6) وهو وحيد.

المثال (3):

تأمل مسألة القيم الابتدائية:

$$3\frac{d^3y}{dx^3}+5\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+7y=0 \quad ,y(1)=0,\ \ y'(1)=0,\ y''(1)=0$$

تجد أنّ شروط المبرهنة (4.1) قد تحققت جميعها؛ لأن المعاملات ثوابت والمعادلة التفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثالثة ، عليه يكون لمسألة القيم الابتدائية حل وهو وحيد. لاحظ أنّ الحل، هو الحل الصفري: $y=0$ لأية فترة تحوي $x=1$.

المثال (4):

إنّ الدالة $y=3e^{2x}+e^{-2x}-3x$ هي حل لمسألة القيم الابتدائية:

$$y'' - 4y = 12x \quad , y(0) = 4, \;\; y'(0) = 1$$

كما أنّ شروط المبرهنة (4.1) قد تحققت جميعها؛ لأنّ المعادلة التفاضلية خطية من الرتبة الثانية غير متجانسة فيها: $g(x) = 12x$ دالة متصلة و $a_2(x) \neq 0$ على أية فترة I تحوي الصفر. عليه حسب المبرهنة (4.1)، إنّ الحل وحيد.

المثال (5):

إنّ الدالة $y = \frac{1}{4}\sin 4x$ هي حل لمسألة القيم الابتدائية:

$$y'' + 16y = 0 \quad , y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0$$

كما أنّ شروط المبرهنة (4.1) قد تحققت جميعها؛ لأنّ المعادلة التفاضلية خطية من الرتبة الثانية متجانسة . عليه حسب المبرهنة (4.1)، إنّ الحل وحيد على أية فترة تحوي الصفر.

المثال (6):

إنّ الدالة $y = cx^2 + x + 3$ هي حل لمسألة القيم الابتدائية:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 6 \quad , y(0) = 3, \;\; y'(0) = 1$$

على الفترة $(-\infty, \infty)$ لأي اختيار للمَعْلَمَة c. لأنّ مشتقة الدالة:

$y' = 2cx + 1$ و $y'' = 2c$ ، ومنها نحصل على:

$$\begin{aligned} x^2 y'' - 2xy' + 2y &= x^2(2c) - 2x(2cx+1) + 2(cx^2 + x + 3) \\ &= 2cx^2 - 4cx^2 - 2x + 2cx^2 + 2x + 6 = 6 \end{aligned}$$

كما أنّ:

$$y(0) = 2c(0) + 1 = 1 \quad \text{و} \quad y(0) = c(0)^2 + 0 + 3 = 3$$

أي أنّ الدالة هي حل لمسألة القيم الابتدائية. من جانب آخر إنّ المعادلة التفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية فيها $g(x) = 6$ دالة متصلة على الفترة $(-\infty, \infty)$. لكن أحد شروط المبرهنة (4.1) لم يتحقق؛ وهو: $a_2(x) = x^2$ يكون صفراً عندما $x = 0$ ، كما أن الشرط الابتدائي معطى عندما $x = 0$ التي تنتمي الى الفترة المعطاة ، في حين اشترطت المبرهنة (4.1) على أن يكون $a_2(x) \neq 0$ على أية فترة I تحوي الصفر.

4.2 مسائل القيم الحدودية BVP (Boundary value problems)

سنتناول في هذا البند نمطاً آخر من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية أو أعلى التي فيها المتغير المعتمد y ومشتقاته لها قيم محددة عند نقاط مختلفة. الصيغة العامة للمسألة هي:

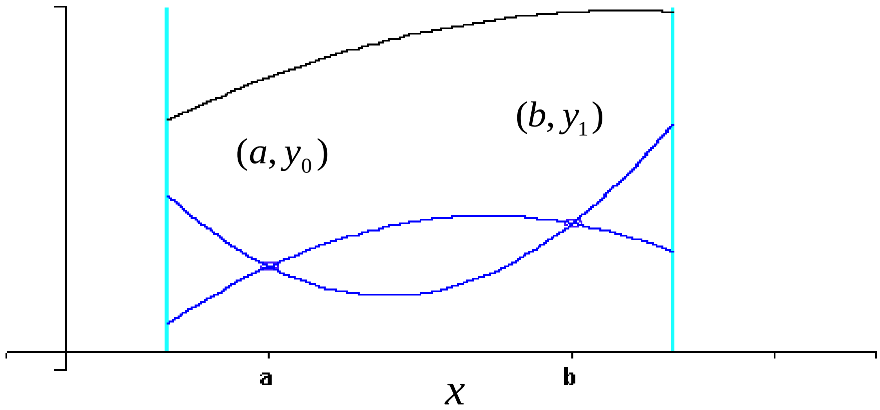
$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \qquad (4.9)$$

وفق الشرطين:

$$y(a)=y_0,\ \ y(b)=y_1 \qquad (4.10)$$

تدعى المسألة (4.9) و (4.10) بـ "مسألة القيم الحدودية" و يرمز لها باختصار (BVP)، ويدعى الشرطان (4.10) بـ "الشروط الحدودية". بالطبع هنا $a,\ b$ ثابتان حقيقيان مختلفان، أي $a\neq b$ وينتميان لفترة الحل I.

إنّ حل مسألة القيم الحدودية (BVP) هو دالة تحقق المعادلة التفاضلية (4.9) على فترة I تحوي النقطتين $a,\ b$ ، ويمر من النقطتين: (a,y_0) و (b,y_1) كما موضح في الشكل (4.1):



الشكل (4.1)

في حالة المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية، يكون للشروط الحدودية (4.10) أربعة احتمالات، هي:

$$y(a)=y_0,\quad y(b)=y_1 \quad ;$$

$$y(a)=y_0,\quad y'(b)=y_1' \quad ;$$

$$y'(a)=y_0',\quad y(b)=y_1 \quad ;$$

$$y'(a)=y_0',\quad y'(b)=y_1' \quad ,$$

حيث إنّ y_0 و y_0' و y_1 ، و y_1' ثوابت اختيارية حقيقية. كما موضح في الأمثلة الآتية:

المثال (1):

لنعد الى المثال (4) من البند (1.6)، نجد أنّ الدالة: $x(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$ **هي عائلة حلول بمَعْلَمَتين اثنتين للمعادلة التفاضلية:** $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$ **على الفترة** $\Re = (-\infty, \infty)$**.**

إذا أضفنا الشروط الحدودية: $x(0) = 0, \quad x(\frac{2\pi}{3}) = 0$ **، نحصل على** $c_1 = 0$ **وعليه فإنّ الحل يصبح:**

$$x = c_2 \sin 3t$$

الآن عندما : $t = \frac{2\pi}{3}$**، نحصل على:**

$$0 = c_2 \sin 2\pi.$$

وبما أنّ $\sin 2\pi = 0$ **، فعليه يكون حل (BVP):** $x(t) = c_2 \sin 3t$ **لأي إختيار للمَعْلَمَة** c_2**.**

إذاً: الدالة $x(t) = c_2 \sin 3t$ **هي عائلة حلول بمَعْلَمَة واحدة لمسألة القيم الحدودية.**

ملاحظة: إذا استبدلنا الشروط الحدودية لمعادلة تفاضلية معينة، فإنّ الحل يتغير أيضاً. على سبيل المثال: إذا استبدلنا الشروط الحدودية للمعادلة في المثال (1)، بالشرطين:

$$x(0) = 0, \quad x'(\frac{\pi}{3}) = 0$$

نجد أنّ $c_1 = 0$ **، وأنّ حل (BVP) هو:** $x(t) = c_2 \sin 3t$ **. وعند التعويض في الشرط الثاني، نحصل على:** $0 = 3c_2 \cos 3(\frac{\pi}{3}) = -3c_2$**. أي أنّ:** $c_2 = 0$**، وحل مسألة القيم الحدودية هو الحل الصفري** $y = 0$ **، وهو وحيد.**

المثال (2):

الدالة: $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$ **هي عائلة حلول بمَعْلَمَتين اثنتين للمعادلة التفاضلية:**

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

على الفترة $I = (0, \infty)$ **؛ حقق ذلك. إذا أضفنا الشروط الحدودية:**

$$y'(1)=0, \quad y'(2)=-8\ln 2$$

فباستخدام المشتقة نحصل على:

$$y'(x)=2c_1x+2c_2x\ln x+c_2x \; .$$

نعوض: $y'(1)=0$ ، فنحصل على: $c_2=-2c_1$ ، ثم نعوض بالشرط: $y'(2)=-8\ln 2$

فنحصل على $c_1=1$ و $c_2=-2$ (حقق ذلك)، عليه فإنّ الحل الخاص يصبح:

$$y=x^2-2x^2\ln x \; .$$

من حق الطالب أن يسأل من أين جاء الحل؟ وكيف نحصل عليه؟ بالطبع الإجابة على هذه الأسئلة ستكون في الفصل القادم.

4.3 الحلول المعتمدة خطياً والمستقلة خطياً

(Linear dependent and linear independent solutions)

لاحظنا سابقاً أنّ حل المعادلة التفاضلية يمكن أنْ يكون عائلة حلول تختلف عن بعضها بثابت اختياري حقيقي. أي يمكن أن يكون الحل عدد غير منتهٍ من الدوال تختلف عن بعضها بثابت. سنميز في هذا البند نمطاً محدداً من حلول المعادلات التفاضلية الخطية.

يعود الفضل في تطوير هذا الموضوع الى جوزيف رونسكيان (Josef M. Wronskian): ولد في بولندا (1778 - 1853م) وتعلم في المانيا وعاش معظم حياته في فرنسا. يعد فيلسوفاً وله اسهام محدود في الرياضيات يقتصر على المحدد المعروف باسمه، ويؤمن بإنّ الوصول الى الحقيقة الصرفة تكون عبر الرياضيات.

التعريف (4.1): تسمى الدوال: $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ،... ، و $f_n(x)$ المعرفة على الفترة $I=[a,b]$ "معتمدة خطياً" على الفترة I إذا كان هناك n من الثوابت الحقيقية: $c_i\ (i=1,2,\dots,n)$ التي لا تساوي جميعها صفراً وبحيث إنّ:

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\dots+c_nf_n(x)=0 \qquad (4.11)$$

لجميع قيم x التي تنتمي الى الفترة I. وتسمى مستقلة خطياً على الفترة I ، إذا لم تكن الدوال $f_1(x)$، $f_2(x)$ ،... ، و $f_n(x)$ معتمدة خطياً على تلك الفترة.

ملاحظات:

1. الدوال المعتمدة خطياً على الفترة I تعني أنّه يمكن التعبير عن إحدى هذه الدوال بدلالة دالة او أكثر من المجموعة نفسها على تلك الفترة.

لتوضيح ذلك دعنا نأخذ الحالة التي فيها الدالتان: $f_1(x)$ و $f_2(x)$ المعرفتان على الفترة I. بالطبع تكون الدالتان معتمدتين خطياً على الفترة I، إذا كان: c_1 و c_2 ليست صفراً و:

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ عندئذٍ: $f_1(x) = -\dfrac{c_2}{c_1} f_2(x)$. أي أنّ الدالتين معتمدتان خطياً، تعني أنّ احدى الدالتين هي عبارة عن حاصل ضرب الدالة الأخرى بثابت.

2. الدوال المستقلة خطياً على الفترة I تعني أنّه:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

يتحقق على جميع قيم x التي تنتمي الى الفترة I فقط عندما يكون:

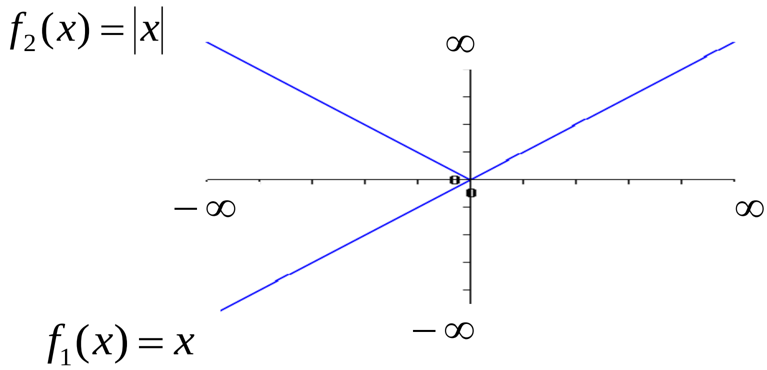
$$c_1 = c_2 = \ldots. = c_n = 0.$$

المثال (1):

الدالتان: $f_1(x) = \sin 2x$ و $f_2(x) = \sin x \cos x$ معتمدتان خطياً على الفترة $(-\infty,\infty)$. لأنّ: $f_1(x) = 2 f_2(x)$ أو الشرط $c_1 \sin 2x + c_2 \sin x \cos x = 0$ يتحقق على الفترة $(-\infty,\infty)$ عندما يكون: $c_1 = \dfrac{1}{2}$ و $c_2 = -1$ (لقد أستخدمنا المتطابقة: $\sin 2x = 2\sin x \cos x$).

المثال (2):

الدالتان: $f_1(x) = x$ و $f_2(x) = |x|$ مستقلتان خطياً على الفترة $(-\infty,\infty)$. لأنّه لا يوجد أي خيار للثابتين c_1 و c_2 بحيث يكون: $c_1 x + c_2 |x| = 0$ على الفترة $(-\infty,\infty)$ إلا عندما يكون: $c_1 = c_2 = 0$. انظر الشكل (4.2):



الشكل (4.2)

المثال (3):

الـــــــــدوال: $f_1(x)=\sin^2 x$ ، $f_2(x)=\cos^2 x$ ، $f_3(x)=\sec^2 x$ ، و $f_4(x)=\tan^2 x$

معتمدة خطياً على الفترة $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ **لأنّ:**

$$c_1 \sin^2 x + c_2 \cos^2 x + c_3 \tan^2 x + c_4 \sec^2 x = 0$$

يتحقق على الفترة $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ **عندما يكون:** $c_1=c_2=1$ و $c_3=1$ ، و $c_4=-1$.

لقد استخدمنا المتطابقتين: $\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad 1+\tan^2 x=\sec^2 x$.

بعد أنْ تعرفنا على الدوال المستقلة خطياً والمعتمدة خطياً، سنعطي اختباراً بموجبه نميز بسهولة الدوال المستقلة خطياً عن الدوال المعتمدة خطياً. سنفترض أن الطالب ملم بأساسيات المصفوفات والمحددات وطريقة إيجاد مفكوكها.

التعريف (4.2): محدد رونسكيان (Wronskian determinant)

لتكن الدوال: $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، **...** ، و $f_n(x)$ **قابلة للاشتقاق حتى الرتبة** $(n-1)$. **يسمى :**

$$W\big(f_1(x), f_2(x),\ldots, f_n(x)\big)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

بمحدد رونسكيان للدوال.

المبرهنة (4.2): (إختبار الدوال المستقلة خطيا)

لتكن الدوال: $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، ...، و $f_n(x)$ قابلة للاشتقاق حتى الرتبة $(n-1)$ على الأقل. إذا كان محدد رونسكيان لا يساوي صفرا، أي: $W\left(f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)\right) \neq 0$ عند نقطة واحدة على الأقل تنتمي الى الفترة $I=[a,b]$ ، فعندئذٍ تكون الدوال: $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، ...، و $f_n(x)$ مستقلة خطياً على الفترة I .

البرهان: باستخدام التناقض. نفرض أنّ محدد رونسكيان لايساوي صفراً عند نقطة معينة x_0 تنتمي الى الفترة I ؛ أي: $W(f_1(x_0), f_1(x_0),..., f_1(x_0)) \neq 0$ ، وأنّ الدوال: $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، ...، و $f_n(x)$ معتمدة خطياً على الفترة I . حسب التعريف (4.1) يوجد n من الثوابت الحقيقية: $c_i \; (i=1,2,...,n)$ التي لا تساوي جميعها صفراً وبحيث إنّ المعادلة (4.11) تتحقق، أي:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x) = 0 \qquad (4.11)$$

لجميع قيم x التي تنتمي الى الفترة I .

وبإجراء عملية المشتقة $(n-1)$ من المرات على (4.11)، نحصل على:

$$\left.\begin{array}{r} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x) = 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + ... + c_n f_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + ... + c_n f_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{array}\right\} \qquad (4.12)$$

أي أنّ:

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & . & . \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ . \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبما أنّ : $W(f_1(x_0), f_1(x_0),..., f_1(x_0)) \neq 0$ لقيمة واحدة على الأقل هي x_0 تنتمي الى الفترة I ، فمن خواص المصفوفات نستنتج أنَّ: $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ ، وهذا يناقض فرضية المبرهنة. إذاً الدوال: $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، ...، و $f_n(x)$ مستقلة خطياً على الفترة I .

أحياننا، ولغرض الاختصار فقط ، يرمز لمحدد رونسكيان بالرمز $W\left(f_1, f_2,..., f_n\right)$.

من المبرهنة (4.2) يمكن استنتاج ما يأتي:

النتيجة (4.1):

إذا كانت الدوال: $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، ... ، و $f_n(x)$ قابلة للاشتقاق حتى الرتبة $(n-1)$ على الأقل ومعتمدة خطياً على الفترة I ، فإنّ: $W\left(f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)\right)=0$ لجميع قيم x التي تنتمي الى الفترة I .

ملاحظة: في حالة المحدد الثنائي ، أي من نوع 2×2 ، فأن محدد رونسكيان يأخذ الصيغة:

$$W(f_1, f_2)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}= f_1 f_2' - f_1' f_2 \qquad (4.13)$$

المثال (4): بين أنّ الدالتين: $f_1(x)=e^{mx}$ و $f_2(x)=e^{nx}$ مستقلتان خطياً على الفترة $(-\infty,\infty)$ عندما تكون $n\neq m$.

الحل: باستخدام محدد رونسكيان (4.13)، نحصل على:

$$W(e^{mx}, e^{nx})=\begin{vmatrix} e^{mx} & e^{nx} \\ me^{mx} & ne^{nx} \end{vmatrix}=(n-m)\,e^{(m+n)x}\neq 0$$

على الفترة $(-\infty,\infty)$، عندما تكون $n\neq m$. فحسب المبرهنة (4.2) نستنتج أنّ الدالتين مستقلتان خطياً.

المثال (5): بين أنّ الدالتين: $f_1(x)=e^{x}$ و $f_2(x)=xe^{x}$ مستقلتان خطياً على الفترة $(-\infty,\infty)$.

الحل: باستخدام محدد رونسكيان (4.13)، نحصل على:

$$W(e^{x}, xe^{x})=\begin{vmatrix} e^{x} & xe^{x} \\ e^{x} & e^{x}+xe^{x} \end{vmatrix}=e^{2x}+xe^{2x}-xe^{2x}=e^{2x}\neq 0$$

على الفترة $(-\infty,\infty)$. فحسب المبرهنة (4.2) نستنتج أنّ الدالتين مستقلتان خطياً.

ملاحظة هامة: لا المبرهنة (4.2) و لا النتيجة (4.1) تؤكدان شيئاً عندما يكون الرونسكيان W لبعض الدوال المعرفة على فترة I مساويا للصفر عند قيمة أو أكثر تنتمي للفترة I. ففي المثال (2) الدالتان $f_1(x)=x$ و $f_2(x)=|x|$ مستقلتان خطياً على الفترة $(-\infty,\infty)$ ، و لكن لكل $1\leq x$ تكون قيمة الرونسكيان $W(f_1, f_2)=\begin{vmatrix} x & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$.

المثال (6): بين أنّ الدالتين: $f_1(x)=\sin^2 x$ و $f_2(x)=1-\cos 2x$ معتمدتان خطياً على الفترة $(-\infty,\infty)$.

الحل: باستخدام محدد رونسكيان (4.13) عند $x=0$ ، نحصل على:

$$W(f_1(x),f_2(x))=\begin{vmatrix}\sin^2 x & 1-\cos 2x\\ 2\sin x\cos x & 2\sin 2x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

عليه لا نستطيع الاستنتاج إلا باستخدام التعريف.

بما أن $\sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ نستطيع اختيار القيمتين $c_2=\frac{1}{2}, c_1=-1$ لنحصل على $c_1\sin^2(x)+c_2(1-\cos(2x))=-\sin^2(x)+\frac{1}{2}(1-\cos(2x))=0$ على الفترة $(-\infty,\infty)$.

فحسب التعريف (4.1) الدالتان معتمدتان خطياً.

ملاحظة: عند البحث عن حلول معادلة تفاضلية، يهمنا كثيراً الحصول على حلول مستقلة خطياً وغير صفرية لأنها تمثل حلولاً لمشاكل طبيعية وواقعية، ولا نتعامل مع الحلول المعتمدة خطياً.

4.4 المعادلات الخطية المتجانسة (Linear homogenous DE)

تسمى المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n :

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \qquad (4.14)$$

بالمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n .

الأمثلة (1):

المعادلة التفاضلية: $\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{dy}{dx}-5y=0$ خطية متجانسة من الرتبة الثالثة.

المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2x}{dt^2}+9x=0$ خطية متجانسة من الرتبة الثانية.

المعادلة التفاضلية: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}-5y=0$ خطية متجانسة من الرتبة الثانية.

لمناقشة حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة (4.5) نحتاج الى معرفة حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة أولاً، عليه سنبحث المعادلات الخطية المتجانسة أولاً. سنبدأ بالمبرهنة الآتية التي تسمى بـ "قاعدة التراكب" (Superposition principle) :

المبرهنة (4.3): ليكن: y_1 ، y_2 ، ...، و y_k **حلولاً للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (4.14) على الفترة** I **. فعندئذٍ التركيب الخطي:**

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x),$$

حيث إنّ $c_i \ (i = 1,2,\dots,k)$ **ثوابت اختيارية، هو أيضاً حل على الفترة نفسها.**

البرهان: دعنا نبرهنها في حالة $k = 2$ **، نفرض أنّ** $y_1(x)$ **و** $y_2(x)$ **حلان للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية على الفترة** I **:**

$$a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) y = 0 \qquad \textbf{(4.15)}$$

حيث إنّ $a_2(x) \neq 0$ **. عليه يكون:**

$$a_2(x)\frac{d^2 y_1}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy_1}{dx} + a_0(x) y_1 = 0$$

$$a_2(x)\frac{d^2 y_2}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy_2}{dx} + a_0(x) y_2 = 0$$

سوف نثبت أنّ : $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ **هو حل للمعادلة (4.15):**

$$\begin{aligned}
& a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y \\
&= a_2(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + a_1(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + a_0(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\
&= c_1\big(a_2(x) y_1'' + a_1(x) y_1' + a_0(x) y_1\big) + c_2\big(a_2(x) y_2'' + a_1(x) y_2' + a_0(x) y_2\big) \\
&= c_1(0) + c_2(0) = 0.
\end{aligned}$$

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات أنّ: $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x)$ **هي حل للمعادلة التفاضلية (4.14).**

من المبرهنة (4.3) يمكننا استنتاج ما يأتي:

النتيجة (4.2):

1- حاصل الضرب: $c\, y_1(x)$ **لأي حل** $y_1(x)$ **لمعادلة تفاضلية خطية متجانسة بثابت** c **هو حل أيضاً.**

2- الحل الصفري $y = 0$ **هو دائما حل لأية معادلة تفاضلية خطية متجانسة.**

لقد حددنا في المبرهنة (4.2) شرطا كافياً كي تكون مجموعة دوال مستقلة خطياً على فترة معينة، سنبين في حالة كون الدوال هي عبارة عن مجموعة حلول معادلة تفاضلية خطية متجانسة فإنّ الاختبار المذكور في المبرهة (4.2) يصبح كافياً وضرورياً كي تكون مجموعة الحلول مستقلة خطياً، كما في المبرهة الآتية التي سنكتفي باعطاء المنطوق فقط بدون برهان:

المبرهنة (4.4): ليكن: y_1 ، y_2 ، ... ، و y_n مجموعة حلول عددها n للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (4.14) على الفترة I. عندئذٍ تكون مجموعة الحلول مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان $W(y_1, y_2,..., y_n) \neq 0$ لجميع قيم x التي تنتمي الى الفترة I.

ملاحظات:

1- المبرهنة (4.4) تعني: عندما يكون y_1 ، y_2 ، ... ، و y_n مجموعة حلول عددها n للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (4.14) على الفترة I ، فإنّ محدد رونسكيان $W(y_1, y_2,..., y_n)$ قد يكون صفرا ً(أو لا يكون صفراً) لجميع قيم x التي تنتمي الى الفترة I.

2- تنال مجموعة الحلول المستقلة خطياً التي عددها n للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n اهتماماً كبيراً في هذا الفصل.

التعريف (4.3): المجموعة الأساسية للحلول (Fundamental set of solutions)

أية مجموعة: y_1 ، y_2 ، ... ، و y_n من حلول عددها n مستقلة خطياً للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n (4.14) على الفترة I ، تسمى بالمجموعة الأساسية للحلول على تلك الفترة.

بالطبع أنّ مسألة وجود المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (4.14) على الفترة I محسومة حسب المبرهة الآتية التي سنكتفي بذكرها دون البرهان.

المبرهنة (4.5): وجود المجموعة الأساسية

توجد المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n (4.14) على الفترة I .

سنتناول فيما يأتي مسألة التركيب الخطي للمجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n على الفترة I ، وهل هي حل للمعادلة التفاضلية نفسها؟ سنسمي هذا الحل الذي هو عبارة عن التركيب الخطي للمجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

من الرتبـة n (4.14) علـى الفتـرة I بـ "الحل العام" (General solution). فـي الحقيقـة هذه التسمية لا تتعارض مع تسمية الحل العام التي تناولناها في الفصل الأول، لإنّ هذا الحل يحتـوي أيضـاً على جميع حلول المعادلة التفاضلية كون المعادلة خطية.

المبرهنة (4.6): (الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة)

لتكن: y_1 ، y_2 ، ...، و y_n المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n (4.14) على الفترة I . عندئذٍ الحل العام للمعادلة التفاضلية على الفترة نفسها هو:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

حيث إنّ $c_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$ ثوابت اختيارية.

المبرهنـة (4.6) تعنـي أنّـه إذا كـان $Y(x)$ هـو أي حـل للمعادلـة التفاضـلية (4.14) علـى الفتـرة I ، فعندئذٍ يمكننا إيجاد الثوابت: C_1 ، C_2 ، ... ، و C_n بحيث إنّ:

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

مرة اخرى ولغرض السهولة، سنبرهن المبرهنة في حالة $n = 2$.

البرهان:

ليكن $n = 2$؛ عندئذٍ المعادلة التفاضلية (4.14) تأخذ الصيغة (4.15):

$$a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) y = 0$$

على الفترة I .

ليكن Y حلاً للمعادلة التفاضلية (4.15) و y_1 و y_2 حلين مستقلين خطياً للمعادلة التفاضلية نفسها على الفترة I .

نفرض أنّ $x = t$ نقطة تنتمي الى الفترة I تحقق: $W\left(y_1(t), y_2(t)\right) \neq 0$

نفرض أيضاً أنّ: $Y(t) = k_1$ و $Y'(t) = k_2$. تأمل المعادلتين:

$$C_1 Y_1(t) + C_2 Y_2(t) = k_1$$
$$C_1 Y_1'(t) + C_2 Y_2'(t) = k_2$$

يمكننا إيجاد قيمة وحيدة لكل من C_1 و C_2 بشرط أن يكون محدد معاملات المعادلتين السابقتين لا يساوي صفراً، أي:

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_1'(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

المحدد السابق هو محدد رونسكيان عند النقطة $x=t$ ، وهو لا يساوي صفراً، لأنّ y_1 و y_2 مستقلان خطيا. الآن دعنا نعرّف:

$$G(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

نجد أنّ $G(x)$ تحقق المعادلة التفاضلية (4.15) و تحقق الشروط الابتدائية:

$$G(t)=C_1Y_1(t)+C_2Y_2(t)=k_1$$
$$G'(t)=C_1Y_1'(t)+C_2Y_2'(t)=k_2;$$

إذاً $G(x)$ تحقق المعادلة التفاضلية (4.15) وشروطها الابتدائية. وبما أن الحل وحيد حسب المبرهنة (4.1) ، فعندئذٍ يكون $G(x)=Y(x)$ ، أي أنّ:

$$Y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

وبذلك يتم البرهان.

المثال (2):

الدالتان: $y_1=e^{2x}$ و $y_2=e^{-2x}$ حلان للمعادلة التفاضلية: $y''-4y=0$ على الفترة $(-\infty,\infty)$ ، تحقق من ذلك؟ كما أنّ الدالتين مستقلتان خطياً، لأنّ:

$$W(e^{2x},e^{-2x})=\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{-2} & -2e^{-2x}\end{vmatrix}=-4\neq 0$$

لجميع قيم x. إذن y_1 و y_2 تشكل المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية المعطاة على الفترة $(-\infty,\infty)$، عليه حسب المبرهنة (4.6):

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}$$

هو الحل العام على الفترة $(-\infty,\infty)$.

المثال (3):

الدالتان: $y_1=\sin x$ و $y_2=\cos x$ حلان للمعادلة التفاضلية: $y''+y=0$ على الفترة $(-\infty,\infty)$ ، تحقق من ذلك؟ كما أنّ الدالتين مستقلتان خطياً، لأنّ:

$$W(\sin x,\cos x)=\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=-(\sin^2 x+\cos^2 x)=-1\neq 0$$

لجميع قيم x. إذن y_1 و y_2 هي المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية المعطاة على الفترة $(-\infty,\infty)$، عليه حسب المبرهنة (4.6):

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x$$

هو الحل العام على الفترة $(-\infty,\infty)$.

المثال (4):

الدالتان: $y_1 = 1+\sin x$ و $y_2 = 1+\cos x$ حلان للمعادلة التفاضلية: $y'' + y = 1$ على الفترة $(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$، ومستقلتان خطياً تحقق من ذلك؟

لكن: $y = 2(1+\cos x)$ و $y = (1+\sin x)+(1+\cos x)$ ليسا حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة على الفترة نفسها، لأنّ المعادلة التفاضلية غير متجانسة وعليه المبرهنة (4.5) لا تنطبق في هذا المثال.

المثال (5):

الدالتان: $y_1 = x^2$ و $y_2 = 1$ حلان للمعادلة التفاضلية: $yy'' - y' = 0$ على أية فترة.

لكن: $y = -x^2$ و $y = x^2 + 1$ ليسا حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة على الفترة نفسها، لأنّ المعادلة التفاضلية غير خطية وعليه المبرهنة (4.5) لا تنطبق في هذا المثال.

ملاحظة: من المثالين السابقين نستنتج أنّ المبرهنة (4.5) تنطبق على المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة حصراً.

بالطبع لا نسأل في هذه المرحلة عن كيفية الحصول على حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة لأنّ هذا هو عملنا في الفصل القادم.

بعد أن تناولنا أساسيات المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة، الآن نتناول أساسيات المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة.

4.5 المعادلات الخطية غير المتجانسة (Nonhomogenous linear DE)

تأمل المعادلة التفاضلية (4.5) الخطية غير المتجانسة من الرتبة n:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (4.15)$$

حيث إنّ $g(x)$ ، $a_1(x)$ ، $a_2(x)$،...، و $a_n(x)$ هي دوال تحتوي على المتغير المستقل x أو ثوابت، أي لا تحتوي على المتغير المعتمد y، و $a_n(x) \neq 0$. وأنّ y ومشتقاتها كافة مرفوعة للأس 1.

عندما تكون $g(x) = 0$ ، فإن المعادلة التفاضلية تصبح خطية متجانسة من النوع (4.14) التي سبق ان ناقشناها في البند السابق (4.3).

الأمثلة (1):

المعادلة التفاضلية: $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 5y = e^x$ خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية.

المعادلة التفاضلية: $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3\dfrac{dy}{dx} - 5y = x + 1$ خطية غير متجانسة من الرتبة الثالثة.

المعادلة التفاضلية: $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 3\dfrac{dx}{dt} + 5x = \sin t$ خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية.

لبحث نمط حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة (4.5) نستعين بحل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة (4.14) أولاً. سنبدأ بالتعريف الآتي:

التعريف (4.4): تسمى الدالة y_p التي لا تحتوي على أية مَعْلَمَة وتحقق المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة n (المعادلة 4.15) على الفترة I بـ "الحل الخاص" للمعادلة (Particular solution).

المثال (2):

الدالة الثابتة $y_p = 3$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة:

$$y'' + 9y = 27.$$

المثال (3):

الدالة $y_p = -\dfrac{11}{12} - \dfrac{1}{2}x$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x.$$

التحقيق: نشتق y_p مرتين ونعوض في المعادلة التفاضلية، نحصل على:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 - 6(0) + 11(-\frac{1}{2}) - 6(-\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x) = 3x$$

نتناول الآن مبرهنة نظيرة للمبرهنة (4.6) ولكن خاصة بالمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة.

المبرهنة (4.7): الحل العام (General Solution)

ليكن y_p أي حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة n (4.5) على الفترة I ، وليكن y_1 ، y_2 ، ...، و y_n المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (4.14) على الفترة I التي تقابل (4.5). عندئذٍ الحل العام للمعادلة التفاضلية (4.15) على الفترة نفسها هو:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) + y_p,$$

حيث إنّ $c_i \ (i = 1,2,\ldots,k)$ ثوابت اختيارية.

البرهان: ليكن y_p أي حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة n (4.15) على الفترة I ، أي أنّ y_p يحقق (4.15) وعليه:

$$a_n(x)\frac{d^n y_p}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y_p}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy_p}{dx} + a_0(x) y_p = g(x) \quad (4.16)$$

وليكن y_1 ، y_2 ‘ ...، و y_n المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (4.14) على الفترة I التي تقابل (4.15). عندئذٍ

$$Y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

حيث إنّ $c_i \ (i = 1,2,\ldots,k)$ ثوابت اختيارية هي حل للمعادلة (*4.14*). أي أن:

$$a_n Y^{(n)} + \ldots + a_1 Y' + a_0 Y = 0 \qquad (4.17)$$

سوف نبرهن أنّ: $y = Y + y_p$ هي حل للمعادلة التفاضلية غير الخطية (4.15). الآن باستخدام المعادلة (4.16) و (4.17) نحصل على :

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = a_n (Y + y_p)^{(n)} + \ldots + a_1 (Y + y_p)' + a_0 (Y + y_p)'$$
$$= (a_n Y^{(n)} + \ldots + a_1 Y' + a_0 Y) + (a_n y_p^{(n)} + \ldots + a_1 y_p' + a_0 y_p)$$
$$= 0 + (a_n y_p^{(n)} + \ldots + a_1 y_p' + a_0 y_p) = \mathrm{g(x)}$$

وبذلك يتم البرهان.

التعريف (4.5): يسمى الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (المعادلة 4.14) على الفترة I ، بـ "الدالة المكملة" او "الدالة المتممة" (Complementary function) ويرمز له بالرمز y_c ، أي أنّ:

$$y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \qquad (4.18)$$

من البرهنة (4.7) نستنتج أنّ الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (4.5) على الفترة I هو:

$$y = y_c + y_p \qquad (4.19)$$

بعبارة اخرى:

الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة = الدالة المكملة + أي حل خاص لها.

المثال (4):

بالعودة الى المثال (3) من هذا البند، نجد أنّ: الدالة $y_p = -\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x$$

الدالة $y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ حل عام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

على الفترة $(-\infty, \infty)$ ، تحقق من ذلك. عليه فإنّ الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة هو:

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$$

المثال (5):

الدالة $x_p = -\frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غيرالمتجانسة:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 25\cos 4t$$

الدالة $x_c = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ حل عام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

على الفترة $(-\infty, \infty)$ ، تحقق من ذلك. عليه فإنّ الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة هو:

$$x(t) = x_c + x_p = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$$

هذا النوع من المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية سينال اهتماماً كبيراً حين دراستنا تطبيقات الاهتزازات في الفصل السادس.

الآن نتناول مبرهنة (بدون برهان) مفيدة عند ايجاد الحل الخاص لمعادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة العليا، وتسمى أيضاً بقاعدة التراكب (Superposition principle) للمعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة.

المبرهنة (4.8): الحل العام (General Solution)

لتكن y_{p_1} ، y_{p_2} ، ...، و y_{p_k} حلولاً خاصة عددها k للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة n (4.5) على الفترة I ، التي تقابل الدوال المختلفة التي عددها k : g_1 ، g_2 ، ...، و g_k . أي أنّ y_{p_i} ترمز للحلول الخاصة للمعادلة التفاضلية :

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g_i(x),$$

حيث إنّ: $i=1,2,\ldots,k$. عندئذٍ يكون:

$$y_p=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)+\ldots+y_{p_k}(x)$$

حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g_1(x)+g_2(x)+\ldots+g_k(x).$$

المثال (6):

الدالة: $y_{p_1}=-4x^2$ حل خاص للمعادلة التفاضلية:

$$y''-3y'+4y=-16x^2+24x-8$$

الدالة: $y_{p_2}=e^{2x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية: $y''-3y'+4y=2e^{2x}$

الدالة: $y_{p_3}=xe^{x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية: $y''-3y'+4y=2xe^{2x}-e^{x}$

فحسب المبرهنة (4.8) يكون تركيب الحلول الخاصة الثلاثة:

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}=-4x^2+e^{2x}+xe^{x}$$

حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية:

$$y''-3y'+4y=-16x^2+24x-8+2e^{2x}+2xe^{x}-e^{x}$$

4.6 المخرجات التعليمية للفصل (Learning outcomes)

بعد الانتهاء من دراسة الفصل يكون الطالب قد أتقن المخرجات التعليمية الآتية:

1. التمييز بين مسائل القيم الابتدائية ومسائل القيم الحدودية.
2. التعرف على المعادلات التفاضلية الخطية من رتب عليا بصيغتها العامة.
3. التعرف على المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بصيغتها العامة.
4. التمييز بين المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة.
5. التمييز بين الحلول المعتمدة خطياً والحلول المستقلة خطياً.
6. استخدام محدد رونسكيان لاختبار مجموعة حلول معادلة تفاضلية من حيث كونها مستقلة خطياً.
7. التعرف على أنواع حلول المعادلات التفاضلية غير المتجانسة: الحل الخاص، الدالة المكملة، والحل العام.
8. ايجاد المجموعة الأساسية لحلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة.
9. تحديد شروط مبرهنة وجود المجموعة الأساسية للحلول.
10. إيجاد الدالة المكملة للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة.
11. استيعاب المفاهيم الأساسية التي تمكن الطالب من الانتقال الى الفصل الخامس.
12. المقدرة على استخدام القرص الممغنط المرافق للكتاب لمراجعة محتويات الكتاب.

تمارين الفصل الرابع

صنف المعادلات التفاضلية من 1- 6 من حيث مسائل قيم إبتدائية (IVP) أم مسائل قيم حدودية (BVP):

.1 $xy'' - 2xy' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \; y(1) = 0$

.2 $y'' - 2y' - 3y = x + 1, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

.3 $x^2 y'' - 2xy' - 3y = e^x, \quad y'(0) = 1, \; y(1) = 0$

.4 $x'' + 64x = \sin t, \quad x(-1) = 1, \; x(1) = 0$

.5 $3y'' - 2y' - 3y = xe^x, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = 0$

.6 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0, \; x'(0) = 0, \; x'(\dfrac{\pi}{2}) = 2$

هل الدوال من 7- 18 مستقلة أم معتمدة خطياً على الفترة المبينة إزاءها:

.7 $f_1(x) = 1 \quad , f_2(x) = x \, , \; f_3(x) = x^2 \quad , I = (-\infty, \infty)$

.8 $f_1(x) = 1 \quad , f_2(x) = x \, , \; f_3(x) = 2x - 1 \quad , I = (-\infty, \infty)$

.9 $f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = \cosh x, \quad I = (-\infty, \infty)$

.10 $f_1(x) = \dfrac{1}{x}, \quad f_2(x) = x \quad , I = (0, \infty)$

.11 $f_1(x) = \sin x \quad , f_2(x) = \cos x \quad , f_3(x) = \tan x \, , I = (-\pi/2, \pi/2)$

.12 $f_1(x) = 1 \quad , f_2(x) = 3x \quad , f_3(x) = x^2 - 1 \quad , I = (-\infty, \infty)$

.13 $f_1(x) = \sin 2x \quad , \quad f_2(x) = \sin x \quad , I = (-\infty, \infty)$

.14 $f_1(x) = Inx \quad , f_2(x) = xInx \quad , I = (0, \infty)$

.15 $f_1(x) = e^{2x}, \quad f_2(x) = e^{3x} \quad , f_3(x) = e^{-x} \, , I = (-\infty, \infty)$

.16 $f_1(x) = 3x \quad , f_2(x) = x(2x+1) \, , f_3(x) = x(x-1) \, , I = (-\infty, \infty)$

.17 $f_1(x) = \begin{cases} 5x^3 & , x \geq 0 \\ -3x^3 & , x < 0 \end{cases} \quad , \quad f_2(x) = 2x^3 \, , I = (-\infty, \infty)$

18. $f_1(x)=\begin{cases} x^2 \ , x \ge 0 \\ 3x^3 \ , x < 0 \end{cases} \quad , \quad f_2(x)=7x^2 \quad , I=(-\infty,\infty)$

19. إذا كان $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ عائلة حلول للمعادلة: $y''-y=0$ على الفترة $(-\infty,\infty)$.

أ- جد أحد أفراد العائلة الذي يحقق الشروط الابتدائية: $y(0)=0 \ , y'(0)=1$.

ب- جد حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشروط الحدودية: $y(0)=0 \quad , \quad y(1)=1$.

20. إذا كان $y=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$ هو عائلة حلول للمعادلة:

$y'''+y'=0$ على الفترة $(-\infty,\infty)$ ، جد فرد العائلة الذي يحقق الشروط الابتدائية:

$y''(\pi)=-1 \quad , y'(\pi)=2 \quad , y(\pi)=0$.

لتكن $y=c_1e^x\cos x+c_2e^x\sin x$ عائلة حلول بمَعْلَمَتين اثنتين للمعادلة التفاضلية: $y''-2y'+2y=0$ على الفترة $(-\infty,\infty)$. لكل من الشروط في المسائل من 21- 24 ، هل بالامكان إيجاد أحد أفراد عائلة الحلول يحقق الشروط:

21. $y(0)=1, \ \ y'(0)=0$

22. $y(0)=1, \ \ y(\pi)=-1$

23. $y(0)=1, \ \ y(\frac{\pi}{2})=1$

24. $y(0)=0, \ \ y(\pi)=0$

لتكن $y=c_1x^2+c_2x^4+3$ عائلة حلول بمَعْلَمَتين اثنتين للمعادلة التفاضلية: $x^2y''-5xy'+8y=24$ على الفترة $(-\infty,\infty)$. لكل من الشروط في المسائل من 25- 28 ، هل بالامكان إيجاد أحد أفراد عائلة الحلول يحقق الشروط:

25. $y(-1)=0, \ \ y(1)=4$

26. $y(0)=1, \ \ y(1)=2$

27. $y(0)=3, \ \ y(1)=0$

28. $y(1)=3, \ \ y(2)=15$

بين باستخدام محدد رونسكيان أن الدوال من 29- 34 مستقلة خطياً على الفترة المبينة أزاء كل واحدة منها:

29. $x^{1/2} \ , \quad x^2 \quad , \quad (0,\infty)$

30. $1+x \quad , \quad x^3 \quad , \quad (-\infty,\infty)$

.31 $\tan x \quad , \quad \cot x \quad , \quad (0,\pi/2)$ **.32** $\sin x, \ \csc x, \ (0,\pi)$

. 33 $e^{x} \quad , \quad e^{-x} \quad , \quad e^{4x} \quad , \quad (-\infty,\infty)$

.34 $x \quad , \quad xInx \quad , \quad x^{2}Inx \quad , \quad (0,\infty)$

.35 اثبت أن $y=\dfrac{1}{x}$ هو حل للمعادلة غير الخطية $y''=2y^{3}$ على الفترة $(0,\infty)$. ثم بين أن $y=\dfrac{c}{x}$ هو ليس حلاً عندما $c\neq 0, \ \pm 1$.

.36 اثبت أنّ $y_1=1$ و $y_2=\ln x$ حلان للمعادلة غير الخطية: $y''+(y')^{2}=0$ على الفترة $(0,\infty)$. هل y_1+y_2 حل للمعادلة ؟ هل $c_1y_1+c_2y_2$ حل للمعادلة، حيث إنّ $c_1 \ , \ c_2$ ثوابت اختيارية ؟

تحقق من كون الدوال من 37- 44 هي مجموعة الحلول الأساسية للمعادلة التفاضلية المبينة إزاءها على الفترة المعطاة:

ت	المعادلة التفاضلية	الدوال	الفترة
37	$y''-y'-12y=0$	$e^{-3x}, \ \mathrm{e}^{4x}$	$(-\infty,\infty)$
38	$y''-4y=0$	$\cosh 2x, \ \sinh 2x$	$(-\infty,\infty)$
39	$y''-2y'+5y=0$	$e^{x}\cos 2x, \ \mathrm{e}^{x}\sin 2x$	$(-\infty,\infty)$
40	$4y''-4y'+y=0$	$e^{\frac{x}{2}}, \ \ x\,e^{\frac{x}{2}}$	$(-\infty,\infty)$
41	$x^{2}y''-6xy'+12y=0$	$x^{3}, \ \ x^{4}$	$(0,\infty)$
42	$x^{2}y''+xy'+y=0$	$\cos(\ln x), \ \sin(\ln x)$	$(0,\infty)$
43	$y'''+6x^{2}y''+4xy'-4y=0$	$x, \ x^{-2}, \ x^{-2}\ln x$	$(0,\infty)$
44	$y^{(4)}+y''=0$	$1, \ x, \ \cos x, \ \sin x$	$(-\infty,\infty)$

بين أنّ الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من 45- 48 هي الدوال المعطاة بمَعْلَمَتين اثنتين مبينتين إزاءها على الفترة المعطاة:

ت	المعادلة التفاضلية	الدوال	الفترة
45	$y'' - 7y' = 10y = 24e^{x}$	$y = c_1e^{2x} + c_2e^{5x} + 6e^{x}$	$(-\infty,\infty)$
46	$y'' + y = \sec x$	$y = c_1\cos x + c_2\sin x + x\sin x + (\cos x)\ln(\cos x)$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
47	$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12$	$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + x^2e^{2x} + x - 2$	$(-\infty,\infty)$
48	$2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$	$y = c_1e^{2x} + c_2e^{5x} + 6e^{x}$	$(-\infty,\infty)$

49. **تأمل المعادلة التفاضلية الخطية:** $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ **على الفترة** $(-\infty,\infty)$.

أ. بين أنّ $y_1 = x^3$ **و** $y_2 = |x|^3$ **حلان مستقلان خطياً للمعادلة التفاضلية على الفترة؟**

ب. بين أنّ محدد رونسكيان $W(y_1, y_2) = 0$ **لجميع قيم** x **الحقيقية. هل هذا يخالف مبرهنة (4.4)؟ وضح ذلك.**

ت. بين أنّ $Y_1 = x^3$ **و** $Y_2 = x^2$ **حلان مستقلان خطياً للمعادلة التفاضلية على الفترة؟**

ث. أوجد حلاً للمعادلة التفاضلية يحقق الشروط الابتدائية: $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

ح. استخدم المبرهنة (4.3)، قاعدة التراكب، لبيان إذا كان كل من: $y = c_1y_1 + c_2y_2$ **و** $Y = c_1Y_1 + c_2Y_2$ **حلاً عاماً للمعادلة التفاضلية.**

50. **تحقق من أنّ الدالة:**

أ- $y_{p_1} = 3e^{2x}$ **حل خاص للمعادلة التفاضلية:** $y'' - 6y' + 5y = -9e^{2x}$.

ب- $y_{p_2} = x^3 + 3x$ **حل خاص للمعادلة التفاضلية:**

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16 .$$

ثم جد حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية: $y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16 - 9e^{2x}$.

51. **استخدم طريقة التحسس لاستنتاج حل خاص لكل من المعادلتين:**

$y'' + 2y = 10$ **و** $y'' + 2y = -4x$ **. ثم استخدم الجواب لإيجاد حل خاص لكل من المعادلتين:**

$y'' + 2y = -4x + 10$ **و** $y'' + 2y = 8x + 5$.