الفصل الخامس

طرائق حل المعادلات التفاضلية من الرتب العليا

Method of solving higher order differential equations

تناولنا في الفصل السابق التعريفات الرئيسة المتعلقة بحل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة ذات الرتب العليا ومبرهناتها، ولكن لم نذكر طرائق إيجاد حل تلك المعادلات التفاضلية. في هذا الفصل نتناول أهم الطرائق التحليلية لإيجاد حلول معادلات تفاضلية خطية متجانسة وغير متجانسة، ذات معاملات ثابتة ومتغيرة. سنركز على المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية، نتناول في بعض الاحيان الرتبة الثالثة والرابعة وأعلى.

تأمل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة على الفترة I :

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \qquad (5.1)$$

حيث إنّ $a_2(x)\neq 0$. لقد بينا في الفصل السابق أنّ حلها العام هو:

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \qquad (5.2)$$

حيث إنّ $y_1(x)$ و $y_2(x)$ هي المجموعة الأساسية للحلول للمعادلة التفاضلية (5.1) على الفترة I .

لقد بينا في البند (1.4.3) أن المعادلة (5.1) تكافىء:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \qquad (5.3)$$

حيث إنّ $P(x)$ و $Q(x)$ دالتان متصلتان معرفتان على الفترة I .

5.1 طريقة اختزال الرتبة (Reduction of order)

سنبدأ بالمعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة ولكن أحد الحلين معلوم. تأمل المعادلة التفاضلية (5.3)، لنفرض أنّ y_1 أحد الحلول غير الصفرية لها معرف على الفترة I . سنحاول التعرف على طريقة لايجاد الحل الثاني y_2 للمعادلة التفاضلية نفسها بطريقة اختزال الرتبة ، على أن يكون y_1 و y_2 مستقلين خطياً. تعود هذه التسمية لكون الطريقة المستخدمة وهي التعويض باستخدام الحل المعلوم حيث: $y_2=u(x)\,y_1$ سيختزل رتبة المعادلة (5.3) الى الرتبة الأولى ثم نقوم بحلها والحصول على الحل الثاني. قبل اشتقاق القانون العام نبدأ بالمثال الآتي الذي سيوضح الفكرة.

المثـال (1): لـيكن $y_1 = e^x$ حـلاً للمعادلـة التفاضـلية: $y'' - y = 0$ علـى الفتـرة $(-\infty,\infty)$، استخدم طريقة اختزال الرتبة لإيجاد الحل الثاني ثم الحل العام.

الحل: نفرض أنّ الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = u(x)y_1 = ue^x$

نشتق ونعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على:

$$y' = ue^x + u'e^x \quad \text{و} \quad y'' = ue^x + 2u'e^x + u''e^x \text{ ،}$$

$$y'' - y = ue^x + 2u'e^x + u''e^x - ue^x = e^x(2u' + u'') = 0$$

بما أنّ $e^x \neq 0$ **، فنحصل على:** $2u' + u'' = 0$ **.**

الآن نستخدم التعويض: $w = u'$ **ومنها نحصل على** $w' = u''$ **، وبالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على:** $w' + 2w = 0$ **وبالضرب بعامل التكامل** e^{2x} **، نحصل على:**

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}w) = 0$$

باجراء عملية التكامل، نجد أنّ: $w = c_3e^{-2x}$ **ومنها نحصل على:** $\frac{du}{dx} = c_3e^{-2x}$ **،**

وباجراء عملية التكامل ثانيةً، نحصل على: $u = -\frac{1}{2}c_3e^{-2x} + c_1 = c_2e^{-2x} + c_1$ **، حيث إنّ** $c_2 = -\frac{1}{2}c_3$**. وعليه فإن الحل العام هو:**

$$y = e^x u = e^x(c_2e^{-2x} + c_1) = c_2e^{-x} + c_1e^x$$

إذاً الحل الثـاني هو: $y_2 = e^{-x}$**. بمـا أنّ:** $W(e^x, e^{-x}) \neq 0$ **، فـأنّ الحلين مستقلان خطيـاً وعليـه فهما المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية:** $y'' - y = 0$ **على الفترة** $(-\infty,\infty)$**.**

طريقـة عامـة: نبدأ الآن بشـرح خطوات الطريقـة المستخدمة لايجـاد الحل الثـاني للمعادلـة التفاضـلية (5.3) إذا علم الحل الأول على الفترة I **، ثم نشتق قانون بموجبه نجد ذلك الحل:**

1. **نضع المعادلة التفاضلية بصيغة (5.3)، أي:** $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ **.**
2. **نفرض الحل المعلوم** y_1 **، وأنّ الحل العام هو** $y(x) = u(x)y_1$**.**
3. **نشتق الحل العام مرتين ونعوض في المعادلة التفاضلية ثم نجري تبسيطاً ، فنحصل على:**

$$y'' = uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1 \quad \text{و} \quad y' = uy_1' + u'y_1$$

$$uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1 + P(x)(uy_1' + u'y_1) + Q(x)uy_1$$
$$= u\left(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1\right) + 2u'y_1' + u''y_1 + P(x)u'y_1$$
$$= u(0) + 2u'y_1' + u''y_1 + P\,u'y_1 = 0$$

لأن y_1 **تحقـــق المعادلـــة (5.3) كونهـــا حـــلاً لهـــا. عليـــه تصـــبح المعادلـــة التفاضـــلية:**

$$u''y_1 + 2u'y_1' + P\,u'y_1 = 0$$

ومنها نحصل على: $u'' + 2u'\dfrac{y_1'}{y_1} + P\,u' = 0$

4. نفرض أنّ $u' = w$ **، ثم نعوض في المعادلة السابقة ونجري تبسيطاً، فنحصل على:**

$$w' + 2w\frac{y_1'}{y_1} + P\,w = 0$$

لاحظ أنّ المعادلة اصبحت من الرتبة الاولى وهذا هو سبب تسمية الطريقة باختزال الرتبة، حيث إنّ الرتبة اختزلت من الثانية الى الأولى، ومنها نحصل على: $\dfrac{w'}{w} + 2\dfrac{y_1'}{y_1} = -P$

5. بـاجراء عمليـة التكامـل نحصـل علـى: $\ln\left|w\,{y_1}^2\right| = -\int P dx + c$ **، أي أنّ:**

$w = c_2\dfrac{e^{-\int p dx}}{{y_1}^2}$ **، حيث أنّ** $c_2 = e^c$**.**

6. بالتعويض عن w **بما يساويها** u' **، ثم اجراء عملية التكامل، نحصل على:**

$$u = c_2\int \frac{e^{-\int p dx}}{{y_1}^2}dx + c_1$$

7. بما أنّ الحل العام هو $y(x) = u(x)y_1$ **، عليه يكون:** $y = c_2 y_1\int \dfrac{e^{-\int p dx}}{{y_1}^2}dx + c_1 y_1$

8. إذاً الحل الثاني :

$$y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int p dx}}{{y_1}^2}dx \qquad (5.4)$$

ملاحظات:

1. إذا كان $P(x)=0$ فإنّ المعادلة (5.4) تأخذ الصيغة: $y_2=y_1\int \frac{1}{y_1^2}dx$.

2. الحلان y_1 و $y_2=y_1\int \frac{e^{-\int pdx}}{y_1^2}dx$ مستقلان خطياً لأنّ $W(y_1,y_2)\neq 0$.

3. تستخدم هذه الطريقة عندما تكون المعادلة التفاضلية خطية متجانسة ذات معاملات متغيرة أو ثابتة وأحد الحلول معلوم.

المثال (1): استخدم القانون لايجاد الحل الثاني للمعادلة التفاضلية: $x^2y''-3xy'+4y=0$ إذا علمت أن الحل الأول: $y_1=x^2$ ، ثم احسب الحل العام على الفترة $(0,\infty)$.

الحل: نقسم على x^2 اولاً: $y''-\frac{3}{x}y'+\frac{4}{x^2}y=0$ ، ثم نطبق القانون فنحصل على:

$$y_2=x^2\int \frac{e^{-\int -\frac{3}{x}dx}}{x^4}dx=x^2\int \frac{e^{3\ln x}}{x^4}dx=x^2\int \frac{1}{x}dx=x^2\ln x$$

إذاً الحل العام على على الفترة $(0,\infty)$ هو:

$$y=c_1\,x^2+c_2\,x^2\ln x$$

ملاحظة: الحلان x^2 و $x^2\ln x$ مستقلان خطياً على الفترة $(0,\infty)$ ، حقق ذلك.

المثال (2): استخدم القانون لايجاد الحل الثاني للمعادلة التفاضلية: $y''+9y=0$ إذا علمت أن الحل الأول: $y_1=\sin 3x$ ، ثم احسب الحل العام على الفترة $(-\infty,\infty)$.

الحل: نستخدم الصيغة: $y_2=y_1\int \frac{1}{y_1^2}dx$ فنحصل على:

$$y_2=\sin 3x\int \frac{1}{\sin^2 3x}dx=\sin 3x\int \csc^2 3x dx$$
$$=(\sin 3x)(-\frac{1}{3}\cot 3x)=-\frac{1}{3}\cos 3x$$

أي الحل الثاني هو: $y_2=\cos 3x$ (لماذا؟) والحل العام هو: $y=c_1\sin 3x+c_2\cos 3x$.

5.2 المعادلات الخطية المتجانسة من الرتب العليا ذات المعاملات الثابتة

(Higher order liner homogenous DE with constant coeficients)

نتناول في هذا البند المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة من النمط:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (5.5)$$

حيث إنّ a و b ، و c ثوابت حقيقية، وإنّ $a \neq 0$.

بما أن $\frac{d}{dx}e^{rx} = re^{rx}$ نفرض أنّ الحل من النمط: $y = e^{rx}$ حيث إنّ r ثابت مطلوب إيجاده.

نشتق الحل مرتين ونعوض في المعادلة السابقة، نحصل على:

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$ ،

بالقسمة على e^{rx} ، لأنّ $e^{rx} \neq 0$ لجميع قيم x ، نحصل على المعادلة المساعدة (Auxiliary):

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (5.6)$$

وهي معادلة جبرية من الدرجة الثانية يمكن حلها وحساب جذريها، كما يأتي:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

هنالك ثلاثة احتمالات، تبعاً للمقدار المميز $(b^2 - 4ac)$ موجب أم سالب أم صفر.

الحالة الأولى: جذران حقيقيان مختلفان

إذا كان $b^2 - 4ac > 0$ ، فعندئذٍ نحصل على جذرين حقيقين مختلفين للمعادلة (5.6)، وهما:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويكون الحلان هما:

$$y_1 = e^{r_1 x} \quad \text{و} \quad y_2 = e^{r_2 x}$$

لاحظ أنّ الحلين مستقلان خطياً حسب محدد رونسكيان ولأنّ $r_1 \neq r_2$. أي أن الحلين يشكلان المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية (5.5). وأنّ الحل العام هو:

$$y = c_1e^{r_1 x} + c_2e^{r_2 x}$$

المثال (1): جد حل المعادلة التفاضلية : $y'' + 3y' - 4y = 0$

الحل: المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي:

$$r^2+3r-4=(r+4)(r-1)=0$$

إذاً $r_1=-4$ و $r_2=1$ ، وعليه فالحل العام: $y=c_1e^{-4x}+c_2e^{x}$.

الحالة الثانية: جذران حقيقيان متساويان

إذا كان $b^2-4ac=0$ ، فعندئذٍ نحصل على جذرين حقيقين متساويين للمعادلة (5.6)، وهما:

$$r_1=r_2=\frac{-b}{2a}=r$$

ويكون الحل الأول هو:

$$y=e^{rx}=e^{-\frac{b}{2a}}$$

أما الحل الثاني، فيمكن حسابه باستخدام طريق اختزال الرتبة، أي القانون (5.4) كما يأتي:

نعيد كتابة المعادلة التفاضلية (5.5) ، لتصبح:

$$y''+\frac{b}{a}y'+\frac{c}{a}y=0$$

عندئذٍ، باستخدام القانون نحصل على:

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^{\,2}}dx=e^{rx}\int\frac{e^{-\int\frac{b}{a}dx}}{e^{2rx}}dx=e^{rx}\int\frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{2rx}}dx=e^{rx}\int dx=xe^{rx}$$

لأنّ $\frac{-b}{a}=2r$. عليه فإنّ الحلين هما: $y_1=e^{rx}$ و $y_2=xe^{rx}$

لاحظ أنّ الحلان مستقلان خطياً حسب محدد رونسكيان . أي أنّ الحلين هما المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية. وأنّ الحل العام هو:

$$y=c_1e^{rx}+c_2\,x\,e^{rx}$$

المثال (2): جد حل المعادلة التفاضلية : $y''+2y'+y=0$

الحل: المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي:

$$r^2+2r+1=(r+1)^2=0$$

إذاً $r_1=r_2=-1$ ، وعليه فالحل العام:

$$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$$

الحالة الثالثة: جذران عقديان أحدهما مرافق للآخر

إذا كان $b^2 - 4ac < 0$ **، فعندئذٍ نحصل على جذرين عقديين أحدهما مرافق للآخر للمعادلة (5.6)، وهما:**

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

نفــرض $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ **، حيــث إنّ:** $\alpha = \frac{-b}{2a}$ **و** $\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ **عـــددان حقيقيـــان و** $\beta > 0$**.**

أي أنّ الجذرين هما: $r_1 = \alpha + i\beta$ **،** **و** $r_2 = \overline{r_1} = \alpha - i\beta$**. عليه يكون الحلان هما:**

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \quad \text{و} \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

وأنّ الحل العام هو:

$$y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_1 e^{(\alpha - i\beta)x} \qquad (5.7)$$

يمكن اعادة كتابة الحل (5.7) بصيغة اكثر ملاءمة للتطبيق في الفصول القادمة مستعيناً بصيغة اويلر (Euler's formula) الآتية: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ **، ومنها نحصل على:**

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

سميت الصيغة باسم الرياضي الشهير اويلر الذي سيرد ذكره في الفصل العاشر.

عليه يمكن تبسيط المعادلة (5.7) لتأخذ الصيغة:

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}) \\ &= e^{\alpha x}\left(C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right) \\ &= e^{\alpha x}\left((C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x\right) \end{aligned}$$

إذاً الحل هو:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)}$$

حيث إنّ: $c_1 = C_1 + C_2$ **و** $c_2 = i(C_1 - C_2)$ **هي ثوابت.**

المثال (3): جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $y'' + 4y' + 20y = 0$ **ثم جد الحل الذي يحقق:** $y(0) = 3, \; y'(0) = -1$ **.**

الحل: المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي: $r^2 + 4r + 20 = 0$

إذاً $$r_{1,2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{16 - 4(20)}}{2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{-64}}{2} = -2 \pm 4i$$

أي: $\alpha = -2$ و $\beta = 4$ ، **عليه فالحل العام:**

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$$

المثال (4): أعد حل المثال (3) باضافة الشروط الابتدائية: $y(0) = 3,\ y'(0) = -1$ **الى المعادلة التفاضلية.**

الحل: نشتق الحل العام الذي حصلنا عليه في المثال السابق:

$$y' = -2e^{-2x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) + e^{-2x}(-4c_1 \sin 4x + 4c_2 \cos 4x)$$

ثم نعوض في الشروط الابتدائية، فنحصل على

$$3 = e^{0}(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = c_1$$

$$-1 = -2e^{0}(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) + e^{0}(-4c_1 \sin 0 + 4c_2 \cos 0) = 4c_2 - 2c_1$$

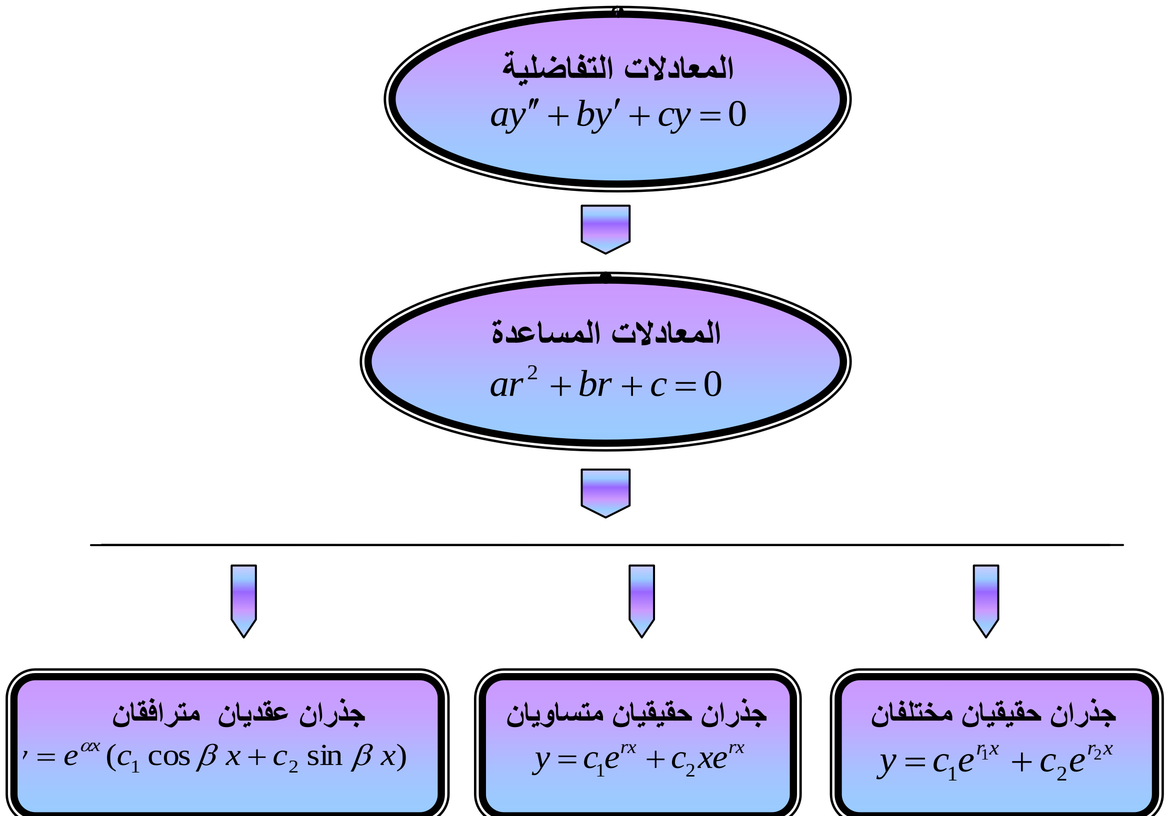
أي أنّ: $c_1 = 3$ و $4c_2 - 2c_1 = -1$ **. ومنها نحصل على:** $c_1 = 3$ و $c_2 = \frac{5}{4}$ ، إذاً

حل مسألة القيم الابتدائية:

$$y = e^{-2x}(3\cos 4x + \frac{5}{4}\sin 4x)$$

يمكن تلخيص الحالات الثلاث السابقة كما في المخطط الآتي:

المخطط الانسيابي لحل المعادلات المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة



المثال (5): جد حل المعادلة التفاضلية : $y'' + k^2 y = 0$ ، **حيث** k **ثابت حقيقي.**

الحل: المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي: $r^2 + k^2 = 0$

إذاً $r_{1,2} = \pm ki$ ، **أي:** $\alpha = 0$ **و** $\beta = k$ ، **عليه فالحل العام:**

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

المعادلة التفاضلية في المثال (5) وحلها مهمة جداً في التطبيقات التي سنتناولها في الفصل السادس.

يمكن استخدام الطريقة نفسها لحل معادلات تفاضلية من الرتبة الثالثة والرابعة ورتب أعلى، كما سنبين ذلك في الامثلة الآتية، دون تناول الجانب النظري:

المثال (6): جد حل المعادلة التفاضلية : $y''' + 3y'' - 4y = 0$

الحل: المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي:

$$r^3 + 3r^2 - 4 = (r-1)(r^2 + 4r + 4) = (r-1)(r+2)^2 = 0$$

إذاً الجذور الثلاثة هي: $r_1 = 1$ **و** $r_2 = r_3 = -2$ ، **وعليه فالحل العام:**

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 \, x e^{-2x}$$

المثال (7): جد حل المعادلة التفاضلية : $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

الحل: المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي:

$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = 0$.

إذاً الجذور الاربعة هي: $r_1 = r_3 = i$ **و** $r_2 = r_4 = -i$ ، **وعليه فالحل العام:**

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$$

ملاحظة: في حالة كون جذور المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية الخطية بمعاملات ثابتة هي عقدية، فإنّ عددها يجب أن يكون زوجياً حيث لكل جذر له مرافق.

المثال (8): جد حل المعادلة التفاضلية : $2y^{(6)} - 7y^{(5)} - 4y^{(4)} = 0$

الحل: المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي:

$$r^6 - 7r^5 - 4r^4 = r^4(2r^2 - 7r - 4) = r^4(2r+1)(r-4) = 0$$

إذاً الجذور الستة هي: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$ و $r_5 = -\frac{1}{2}$ ، $r_6 = 4$ وعليه فالحل العام:

$$y = c_1 + c_2\ x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^{-\frac{1}{2}x} + c_6e^{4x}$$

الجـدول الآتـي يوضـح كيفيـة احتسـاب الحلـول طبقـاً لجـذور المعادلـة المسـاعدة المقابلـة للمعادلـة التفاضلية:

الجدول (1)

الجذور	التكرار	الحلول	الحل العام
$r = 0$	**4**	$y = x$ و $y = 1$ و $y = x^2$ و $y = x^3$	$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$
$r = -1/2$	**1**	$y = e^{-x/2}$	$y = ce^{-x/2}$
$r = 4$	**2**	$y = e^{4x}$ و $y = xe^{4x}$	$y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x}$

نعود لحل المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة:

5.3 طريقة المعاملات غير المحددة (Method of undetermined coefficients)

لقد درسنا في البند (4.5) مواصفات حل المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة n ذات المعاملات المتغيرة على الفترة I :

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (5.8)$$

حيث إنّ $g(x)$ ، $a_1(x)$ ، $a_2(x)$ ،...، و $a_n(x)$ هي دوال تحتوي على المتغير المستقل x أو ثوابت، و $a_n(x) \neq 0$. لقد بينا أيضاً أنّ حلها العام هو:

$$y = y_c + y_p$$

حيث إنّ الدالة المكملـة y_c هي حل المعادلـة التفاضليـة الخطيـة المتجانسـة المرافقـة للمعادلـة (5.8)، أي:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \qquad (5.9)$$

وأنّ y_p هو أي حل خاص للمعادلة (5.8) على الفترة I.

الآن نستعرض طريقة خاصة لحل نمط معين من المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة (5.8)، تسمى "طريقة المعاملات غير المحددة" التي من خلالها نجد الحل الخاص y_p لها. في الحقيقة الطريقة هي استنتاجية وتعتمد على وضع فرضية للحل الخاص معتمدة على صيغة $g(x)$. الطريقة العامة تتولى حل معادلات تفاضلية تحقق الشرطين الآتيين:

1. تكون المعاملات a_1 ، a_2،...، و a_n ثوابت .
2. تكون الدالة $g(x)$: ثابتة، او دالة حدودية ، او دالة أسية $e^{\alpha x}$، او دالة جيب $\sin \beta x$ او جيب تمام $\cos \beta x$، او حاصل جمع او ضرب عدد منتهٍ من هذه الدوال.

على سبيل المثال، تكون الدالة $g(x)$ من النمط:

$$g(x) = 10$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$g(x) = x^2 - 2x + e^{-x}$$

$$g(x) = \sin 3x - x \cos 4x$$

$$g(x) = xe^x \sin x + (3x^2 - 1)e^{-4x}$$

أي أنّ الدالة $g(x)$ هي تركيب خطي من الدوال:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{،}$$

$$P(x)e^{\alpha x} \text{،} \quad P(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \quad \text{،} \quad P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$$

حيث إنّ n عدد صحيح غير سالب، و α و β ثوابت حقيقية.

ملاحظة: إنّ طريقة المعاملات غير المحددة لا تشمل دوال من النمط:

$g(x) = \sin^{-1} x$ و $g(x) = \tan x$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \ln x$ ، و ... الخ

سنتولى حل المعادلات التفاضلية التي تشمل دوال من النمط أعلاه بطرق أخرى في البنود القادمة.

نظراً لكون التركيب الخطي لمشتقات دالة الحل الخاص y_p للمعادلة (5.8) يجب أن يساوي $g(x)$ ، أي أن

$$a_n \frac{d^n y_p}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_p}{dx^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy_p}{dx} + a_0 y_p = g(x)$$

فعليه نستنتج أنّ صيغة الحل الخاص y_p تعتمد على صيغة $g(x)$ نفسها. كما سنلاحظ ذلك من خلال الأمثلة القادمة.

طريقة الحل:

1. **نجد حل المعادلة التفاضلية المتجانسة المرافقة للمعادلة الأصلية، أي نجد الدالة المكملة y_c.**
2. **نفرض الصيغة العامة للحل الخاص y_p .**
3. **نجد المعاملات المجهولة في الحل الخاص y_p بواسطة التعويض في المعادلة غير المتجانسة الأصلية ومساواة الحدود المتشابهة.**
4. **الحل العام هو $y = y_c + y_p$.**

الجدول الآتي يبين نماذج من الحل الخاص y_p تبعاً للدالة $g(x)$:

الجدول (2)

ت	الدالة $g(x)$	الصيغة العامة للحل الخاص y_p
1	1 أو اي ثابت c	A
2	$5x+7$	$Ax+B$
3	$3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
4	x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Cx+D
5	$\sin 4x$	$A\cos 4x + B\sin 4x$
6	$\cos 4x$	$A\cos 4x + B\sin 4x$
7	e^{5x}	Ae^{5x}
8	$(3x-2)e^{3x}$	$(Ax+B)e^{3x}$
9	$(3x^2-2)e^{3x}$	$(Ax^2+Bx+C)e^{3x}$
10	$e^{3x}\cos 4x$	$e^{3x}(A\cos 4x + B\sin 4x)$
11	$5x^2\sin 4x$	$(Ax^2+Bx+C)\cos 4x + (Dx^2+Ex+F)\sin 4x$
12	$xe^{3x}\cos 4x$	$(Ax+B)e^{3x}\cos 4x + (Cx+D)e^{3x}\sin 4x$

المثال (1): جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$

الحل: الخطوة الأولى: نبدأ بحل المعادلة التفاضلية المتجانسة: $y'' + 4y' - 2y = 0$

المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي: $r^2 + 4r - 2 = 0$

إذاً الجذران حقيقيان مختلفان هما: $r_1 = -2 - \sqrt{6}$ و $r_2 = -2 + \sqrt{6}$ وعليه فالدالة المكملة:

$$y_c = c_1 e^{(-2-\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} \; .$$

الخطوة الثانية: نظراً لكون الدالة $g(x)$ هي حدودية من الدرجة الثانية، عليه نفرض أنّ :

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

الآن نجد الثوابت A و B ، و C بحيث إنّ y_p تحقق المعادلة التفاضلية غير المتجانسة.

نشتق y_p مرتين:

$$y_p' = 2Ax + B \quad \text{و} \quad y_p'' = 2A$$

نعوض في المعادلة التفاضلية غير المتجانسة، فنحصل على :

$$y_p'' + 4y_p' - 2y_p = 2A + 4(2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 3x + 6$$

ومنها نحصل على:

$$-2A = 2 \quad ، \quad 8A - 2B = -3 \quad ، \text{و} \quad 2a + 4B - 2C = 6$$

أي أنّ: $A = -1$ و $B = -\frac{5}{2}$ ، و $C = -9$. عليه يكون الحل الخاص:

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9 \; ,$$

والحل العام: $y = y_c + y_p = c_1 e^{(-2-\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$.

ملاحظة: عندما يكون $g(x)$ تركيباً خطياً لانماط متعددة من الدوال، نجد الحل الخاص لكل نمط معين على حدة ، ثم يكون الحل الخاص هو مجموع الحلول الخاصة لتلك الانماط استناداً الى المبرهنة (4.7) من الفصل الرابع . أي أنّ:

$$y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \ldots + y_{p_k}(x)$$

كما هو موضح في المثال الآتي:

المثال (2): حدد نمط الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5\sin 2x + 7xe^{6x}$$

الحل: نفرض أنّ الحل الخاص الذي يقابل $3x^2$ هو $y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C$.

نفرض أنّ الحل الخاص الذي يقابل $-5\sin 2x$ هو $y_{p_2} = D\cos 2x + E\sin 2x$.

نفرض أنّ الحل الخاص الذي يقابل $7xe^{6x}$ هو $y_{p_3} = (Fx+G)e^{6x}$.

عندئذٍ تكون الفرضية المناسبة للحل الخاص y_p ، حسب الملاحظة السابقة هي:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = Ax^2 + Bx + C + D\cos 2x + E\sin 2x + (Fx+G)e^{6x}$$

لاحظ أنّه لا يوجد تكرار في حدود الحل الخاص y_p مع حدود الدالة المكملة y_c:

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{7x} \ .$$

ملاحظة: يجب أن يؤخذ بنظر الاعتبار التكرار بين حدود y_p وحدود y_c. عليه اذا كان أي من حدود y_{p_i} يحتوي على حد مكرر في y_c ، فعليه نضرب y_{p_i} بـ x^n ، حيث إنّ n هو أصغر عدد صحيح يزيل التكرار، كما سنلاحظ ذلك في المثال الآتي:

المثال (3): جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الآتية: $y'' - 2y' + y = e^x$

الحل: الخطوة الأولى: نبدأ بحل المعادلة التفاضلية المتجانسة: $y'' - 2y' + y = 0$

المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي: $r^2 - 2r + 1 = 0$

إذاً الجذران حقيقيان متساويان هما: و $r_1 = r_2 = 1$ وعليه فالدالة المكملة:

$$y_c = c_1 x + c_2 x e^x \ .$$

الآن لا نستطيع فرض الحل الخاص $y_p = Ae^x$ لوجود التكرار مع الدالة المكملة، كما أنّ هذه الفرضية لا تحقق المعادلة التفاضلية غير المتجانسة لأنّ:

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = Ae^x - 2Ae^x + Ae^x = 0 \neq g(x) = e^x$$

كما لا يمكن فرض الحل الخاص $y_p = Axe^x$ لوجود التكرار مع الدالة المكملة أيضاً، كما أنّ هذه الفرضية لا تحقق المعادلة التفاضلية غير المتجانسة (تحقق من ذلك كما في الأولى) .

عليه نفرض الحل الخاص هو: $y_p = Ax^2 e^x$.

نشتق ونعوض في المعادلة التفاضلية الاصلية نحصل على:

$$y'' - 2y' + y = 2Ae^x - 4Axe^x + Ax^2 e^x = e^x$$

عليه نحصل على: $2A=1$ ، **أي أنّ** $A=\frac{1}{2}$ **والحل الخاص هو:** $y_p=\frac{1}{2}x^2e^x$ **.**

المثال (4): جد حل مسألة القيم الابتدائية:

$$y''+y=4x+10\sin x,\quad y(\pi)=0,\ y'(\pi)=2$$

الحل:

الخطوة الأولى: نبدأ بحل المعادلة التفاضلية المتجانسة: $y''+y=0$

المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي: $r^2+1=0$

إذاً الجذران عقديان أحدهما مرافق للآخر: $r_{1,2}=\pm i$ **وعليه فالدالة المكملة:**

$y_c=c_1\cos x+c_2\sin x$ **.**

الخطوة الثانية: نفرض أنّ الحل الخاص الذي يقابل $4x$ **هو** $y_{p_1}=Ax+B$

الفرضية الطبيعية للحل الخاص الذي يقابل $10\sin x$ **هو** $y_{p_2}=C\cos 2x+D\sin 2x$

ونظراً لوجود تكرار بين الدالة المكملة والحل الخاص وهو $\sin x$ **، عليه فإنّ الفرضية المناسبة هي:** $y_{p_2}=x(C\cos x+D\sin x)$ **. عليه نفرض أن الحل الخاص هو:**

$$y_p=Ax+B+x(C\cos x+D\sin x)$$

نشتق y_p **مرتين نحصل على:**

$$y_p'=A+C\cos x+D\sin x+x(-C\sin x+D\cos x)$$

$$y_p''=-C\sin x+D\cos x+x(-C\cos x-D\sin x)+(-C\sin x+D\cos x)$$

الآن نعوض في المعادلة الأصلية فنحصل على:

$$y_p''+y_p=Ax+B-2C\sin x+2D\cos x=4x+10\sin x$$

عليه فإنّ: $A=4$ **و** $B=0$ **و** $C=-5$ **، و** $D=0$

أي أنّ الحل الخاص هو: $y_p=4x-5x\cos x$ **والحل العام هو:**

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+4x-5x\cos x$$

لإيجاد قيمة الثابتين c_1 **و** c_2 **، نعوض بالشروط الابتدائية** $y(\pi)=0,\ y'(\pi)=2$ **، فنحصل على:**

$$y(\pi)=c_1\cos\pi+c_2\sin\pi+4\pi-5\pi\cos\pi=0$$

ومنها نحصل على: $c_1=9\pi$ **. الآن نشتق ونعوض، فنحصل على:**

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + 4 + 5x \sin x - 5\cos x$$

$$y'(\pi) = -c_1 \sin \pi + c_2 \cos \pi + 4 + 5\pi \sin \pi - 5\cos \pi = 2$$

ومنها نحصل على: $c_2 = 7$ **. إذاً حل مسألة القيم الابتدائية هو:**

$$y = 9\pi \cos x + 7\sin x + 4x - 5x\cos x$$

يمكن تعميم طريقة المعاملات غير المحددة لتشمل معادلات تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتب العليا (رتب أعلى من الرتبة الثانية). سنكتفي بتناول المثالين الآتيين:

المثال (5): جد حل المعادلة التفاضلية الآتية: $y''' + y'' = e^x \cos x$

الحل:

الخطوة الأولى: نبدأ بحل المعادلة التفاضلية المتجانسة: $y''' + y'' = 0$

المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي: $r^3 + r^2 = r^2(r+1) = 0$

إذاً الجذور الثلاثة هي: $r_1 = r_2 = 0$ **و** $r_3 = -1$ **، عليه فالدالة المكملة:**

$$y_c = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$$

الخطوة الثانية: نظراً لكون الدالة $g(x)$ **هي حاصل ضرب دالة أسية و دالة جيب التمام، كما لا يوجد تكرار في الحدود، عليه نفرض أنّ :** $y_p = e^x (A\cos x + B\sin x)$

الآن نجد الثابتين: A **و** B **بحيث إنّ** y_p **تحقق المعادلة التفاضلية غير المتجانسة. نشتق** y_p **ثلاث مرات ونعوض في المعادلة التفاضلية غير المتجانسة، فنحصل على :**

$$y_p''' + y_p'' = (-2A + 4B)e^x \cos x + (-4A - 2B)e^x \sin x = e^x \cos x$$

ومنها نحصل على: $-2A + 4B = 1$ **و** $-4A - 2B = 0$ **، أي أنّ:** $A = \frac{-1}{10}$ **، و** $B = \frac{1}{5}$ **. عليه يكون الحل الخاص:** $y_p = e^x(-\frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{5}\sin x)$ **والحل العام:**

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} - \frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \sin x$$

المثال (6): حدد نمط الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الآتية: $y^{(4)} + y''' = 1 - x^2 e^{-x}$

الحل: نبدأ بحساب الدالة المكملة للمعادلة التفاضلية منعاً لتكرار الحدود:

المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي: $r^4 + r^3 = r^3(r+1) = 0$

إذاً الجذور الاربعة هي: $r_1=r_2=r_3=0$ و $r_4=-1$ ، عليه فالدالة المكملة:

$$y_c=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{-x}\ .$$

الآن الحل الخاص الذي يقابل $1-x^2e^{-x}$ هو $y_p\ =A+(Bx^2+Cx+D)e^{-x}$. ونظراً لكون بعض الحدود مكررة، عليه فإنّ الفرضية المناسبة هي:

$$y_p\ =Ax^3+(Bx^2+Cx+D)xe^{-x}$$

سننتقل الآن الى طريقة خاصة أخرى لحل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتب العليا.

5.4 طريقة المؤثرات التفاضلية (Differential operators method)

من المعلوم في حسبان التفاضل والتكامل أن المشتقة $\dfrac{dy}{dx}$ هي مشتقة الدالة y بالنسبة للمتغير المستقل x وهي ليست حاصل قسمة بسط على مقام، وتسمى بالمؤثر التفاضلي ويرمز لها بالرمز $D\,y$ ، باعتبار أنّ $D=\dfrac{d}{dx}$. عليه فالمشتقة الثانية هي:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=D(D\,y)=D^2y$$

يمكن تعميم القاعد السابقة لتصبح: $\dfrac{d^ny}{dx^n}=D^ny$ لأي عدد صحيح موجب n. على سبيل المثال:

$$D(3x^2-2x-5)=6x-2$$

$$D^2(\sin x-x^2+x)=D(\cos x-2x+1)=-\sin x-2$$

$$D^3(x^3+2x-e^x)=D^2(3x^2+2-e^x)=D(6x-e^x)=6-e^x$$

كما أن هذه المؤثرات التفاضلية تخضع لعملية التحليل والابدال والتجميع، كما أنّ معاملاتها يمكن أن تكون متغيرة أو ثوابت، كما موضح في الأمثلة الآتية:

$$(D+3)y=Dy+3y,$$

$$(D-2)(D+1)y=(D+1)(D-2)y=(D^2-D-2)y=D^2y-Dy-2y$$

$$(5x^3D^2-2xD-3x)y=5x^3D^2y-2xDy-3xy$$

$$(2xD^2-2D)\sin x=2x(D^2\sin x)-2(D\sin x)=-2x\sin x-2\cos x$$

يجـــــب علـــــى الطالـــــب أن يفـــــرق بـــــين $D(x\sin x)=x\cos x+\sin x$ و $x(D\sin x)=x\cos x$.

يمكن كتابة أية معادلات تفاضلية بصيغة معادلات مؤثرات تفاضلية وبالعكس، كما يأتي:

المعادلة التفاضلية: $y'-2y=x$ تكافيء $(D-2)y=x$

المعادلة التفاضلية: $y''-3y'-2y=xe^{x}$ تكافيء $(D^{2}-3D-2)y=xe^{x}$

المعادلة التفاضلية: $y''+3y'+2y=xe^{x}$ تكافيء

$$(D^{2}+3D+2)y=(D+1)(D+2)y=(D+2)(D+1)y=xe^{x}$$

وبالعكس يمكن كتابة أية معادلات مؤثرات تفاضلية بصيغة معادلات تفاضلية، كما يأتي:

$$(D^{3}-2D^{2}-3D-4)y=y'''-2y''-3y'-4y,$$

$$(D+1)(D-1)y=(D^{2}-1)y=y''-y$$

من جانب آخر، تأمل المعادلة التفاضلية (5.8) التي تناولناها سابقاً:

$$a_{n}(x)\frac{d^{n}y}{dx^{n}}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{1}(x)\frac{dy}{dx}+a_{0}(x)y=g(x)$$

يمكن تحويلها الى صيغة معادلة مؤثرات تفاضلية كما يأتي:

$$a_{n}(x)D^{n}y+a_{n-1}(x)D^{n-1}y+\ldots+a_{1}(x)Dy+a_{0}(x)y=g(x)$$

أي أنّ:

$$\left(a_{n}(x)D^{n}+a_{n-1}(x)D^{n-1}+\ldots+a_{1}(x)D+a_{0}(x)\right)y=g(x)$$

ويمكن كتابته بصيغة:

$$Ly=g(x)$$

حيث إنّ:

$$L=a_{n}(x)D^{n}+a_{n-1}(x)D^{n-1}+\ldots+a_{1}(x)D+a_{0}(x) \qquad (5.10)$$

تسمى المعادلة (5.10) بالمؤثر التفاضلي من الرتبة n بمعاملات متغيرة، أو المؤثر الحدودي (متعدد الحدود) وهو موضوع مستقل بحد ذاته يسمى "المؤثرات التفاضلية" (Differential operators) ويدرس في مراحل متقدمة وربما في مرحلة الدراسات العليا. إنّ أهم خواص المؤثر التفاضلي L هو أنه مؤثر خطي:

$$L\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)=\alpha Lf(x)+\beta Lg(x)$$

سنتناول في هذا البند جزءاً يسيراً من المؤثرات التفاضلية التي معاملاتها ثوابت وخاصة ما يرتبط بحل المعادلة التفاضلية (5.8).

التعريف (5.1): المؤثر الماحي (المُصَفر) (Annihilator operator)

ليكن L مؤثر تفاضلي بمعاملات ثوابت والدلة f قابلة للاشتقاق لرتبة كافية بحيث إنّ:

$$L\big(f(x)\big)=0,$$

فعندئذٍ يسمى L بماحي (أو مُصَفر) الدالة f .

على سبيل المثال: ماحي العدد الثابت k هو D ، لأنّ: $Dk=0$. وماحي الدالة x هو D^2 ، لأنّ: $D^2x=D(Dx)=D(1)=0$. بشكل عام:

المؤثرالتفاضلي D^n هو ماحي للدوال: 1 و x و x^2 ،...، و $x^{(n-1)}$

نستنتج مباشرة أنّ ماحي الحدودية:

$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}$ ، حيث إنّ: $c_i\ (i=0,1,2,\ldots,n-1)$ ثوابت حقيقية، هو المؤثر الماحي للحد الذي يحتوي على أعلى قوة x^{n-1} ، وهو: D^n لأنّ:

$$\begin{aligned}
&D^n(c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{n-1}x^{n-1})\\
&=D^n(c_0)+D^n(c_1x)+D^n(c_2x^2)+\ldots+D^n(c_{n-1}x^{n-1})\\
&=D^n(c_0)+c_1D^n(x)+c_2D^n(x^2)+\ldots+c_{n-1}D^n(x^{n-1})\\
&=0+c_1(0)+c_2(0)+\ldots+c_{n-1}(0)=0\ .
\end{aligned}$$

المؤثرالتفاضلي $(D-\alpha)^n$ هو ماحي للدوال: $e^{\alpha x}$ و $e^{\alpha x}x$ و $e^{\alpha x}x^2$ ،...، و $e^{\alpha x}x^{(n-1)}$

نستنتج مباشرة أنّ ماحي الدالة:

$y=c_0e^{\alpha x}+c_1xe^{\alpha x}+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}e^{\alpha x}$ ، حيث إنّ: $c_i\ (i=0,1,2,\ldots,n-1)$ ثوابت حقيقية هو المؤثر الماحي للحد الذي يحتوي على أعلى قوة x^{n-1} ، وهو: $(D-\alpha)^n$ لأنّ:

$$\begin{aligned}
&(D-\alpha)^n y=(D-\alpha)^n(c_0e^{\alpha x}+c_1xe^{\alpha x}+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}e^{\alpha x})\\
&=(D-\alpha)^n(c_0e^{\alpha x})+(D-\alpha)^n(c_1xe^{\alpha x})+\ldots+(D-\alpha)^n(c_{n-1}x^{n-1}e^{\alpha x})\\
&=c_0(D-\alpha)^n(e^{\alpha x})+c_1(D-\alpha)^n(xe^{\alpha x})+\ldots+c_{n-1}(D-\alpha)^n(x^{n-1}e^{\alpha x})\\
&=c_0(0)+c_1(0)++\ldots+c_{n-1}(0)=0
\end{aligned}$$

هنا نحتاج بيان أنّ ماحي الدالة $e^{\alpha x}$ هو $(D-\alpha)$ ، لأنّ:

$$(D-\alpha)y=(D-\alpha)e^{\alpha x}=De^{\alpha x}-\alpha e^{\alpha x}=\alpha e^{\alpha x}-\alpha e^{\alpha x}=0$$

بالمثل أنّ ماحي الدالة $xe^{\alpha x}$ هو $(D-\alpha)^2$، لأنّ:

$$(D-\alpha)^2 xe^{\alpha x} = (D-\alpha)(D-\alpha)(xe^{\alpha x})$$
$$= (D-\alpha)\left(D(xe^{\alpha x}) - \alpha xe^{\alpha x}\right)$$
$$= (D-\alpha)(e^{\alpha x} + \alpha xe^{\alpha x} - \alpha xe^{\alpha x})$$
$$= (D-\alpha)(e^{\alpha x}) = 0$$

المؤثرالتفاضلي $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$ هو ماحي للدوال:

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ و $\cos\beta x\, e^{\alpha x}\, x$ و $\cos\beta x\, e^{\alpha x}\, x^2$ ،...، و $\cos\beta x\, e^{\alpha x}\, x^{(n-1)}$

$e^{\alpha x}\sin\beta x$ و $\sin\beta x\, e^{\alpha x}\, x$ و $\sin\beta x\, e^{\alpha x}\, x^2$ ،...، و $\sin\beta x\, e^{\alpha x}\, x^{(n-1)}$

عندما $\alpha = 0$ و $n = 1$ **فإنّ:**

$$(D^2+\beta^2)\begin{cases}\cos\beta x \\ \sin\beta x\end{cases} = 0.$$

المثال (1): جد المؤثر التفاضلي الماحي للدوال الآتية:

ت	الدالة	المؤثر الماحي
1	$1-5x^2+8x^3$	D^4
2	e^{-3x}	$(D+3)$
3	$4e^{2x}-10xe^{2x}$	$(D-2)^2$
4	$5e^{-x}\cos 2x - 9e^{-x}\sin 2x$	D^2+2D+5
5	e^x+2e^{2x}	$(D-1)(D-2)$
6	$1+e^x\cos 2x$	$D(D^2-2D+5)$
7	$x-e^{2x}-\sin 2x$	$D^2(D-2)(D^2+4)$
8	$3-x^2+e^{3x}-xe^{-x}-\cos x$	$D^3(D-3)(D+1)^2(D^2+1)$
9	$x^2+e^{3x}-xe^{-x}-x\cos x$	$D^3(D-3)(D+1)^2(D^2+1)^2$
10	$x\sin 2x + e^{-x}\cos 3x$	$(D^2+4)^2(D^2+2D+10)$

ملاحظات:

1. المؤثرالماحي لحاصل جمع دالتين أو أكثر هو حاصل ضرب المؤثر الماحي لكل دالة، كما لاحظنا في $(10-5)$ من المثال السابق.

2. المؤثر الماحي للدالة ليس وحيداً. على سبيل المثال:كل من $(D+3)^3$ و $D^3(D+3)$ هو مؤثر ماحي للدالة: e^{-3x} (تحقق من ذلك).

بعد أن عرفنا فكرة المؤثرات التفاضلية والمؤثر الماحي للدوال، الآن سنكون قادرين على حل معادلات تفاضلية خطية غير متجانسة بمعاملات ثوابت لأية رتبة.

طريقة الحل:

1. نجد الدالة المكملة عن طريق حل المعادلة التفاضلية المتجانسة المرافقة وحساب الجذور.
2. نحسب المؤثر الماحي للمعادلة التفاضلية باعتباره يساوي حاصل ضرب المؤثر الماحي للطرف الأيسر مع الطرف الأيمن.
3. نكتب المعادلة التفاضلية بصيغة معادلة المؤثر الماحي باستخدام التحليل والتبسيط.
4. نحسب الحل العام للمعادلة التفاضلية التي تقابل معادلة المؤثر الماحي.
5. من الحل العام نحسب الحل الخاص y_p بدلالة الثوابت.
6. نشتق الحل الخاص حسب رتبة المعادلة التفاضلية ونعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على الثوابت، ومنها الحل الخاص
7. حل المعادلة التفاضلية هو: $y = y_c + y_p$

المثال (2): حل المعادلة التفاضلية الآتية: $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$

الحل: نجد الدالة المكملة عن طريق حل المعادلة التفاضلية: $y'' + 3y' + 2y = 0$

المعادلة المساعدة التي تعادلها هي: $r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2) = 0$ **وجذراها هما:**

$r_1 = -1$ **و** $r_2 = -2$ **، والدالة المكملة:**

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

بما أنّ المؤثر الماحي للدالة في الطرف الأيمن: $4x^2$ **هو** D^3 **، فعلية أنّ المعادلة التفاضلية تقابل:**

$$D^3(D^2 + 3D + 2)y = 0$$

وبالتحليل والتبسيط ، نحصل على: $D^3(D+1)(D+2)y = 0$

المعادلة التفاضلية التي تقابل معادلة المؤثر الماحي السابقة هي:

$$y = A + Bx + Cx^2 + c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$$

عليه الحل الخاص هو:

$$y_p = A + Bx + Cx^2$$

وباجراء المشتقة مرتين والتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على:

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 2C + 3(B + 2Cx) + 2(A + Bx + Cx^2) = 4x^2$$

أي أنّ: $2A + 3B + 2C = 0$ و $2B + 6C = 0$ و $2C = 4$

عليه: $A = 7$ و $B = -6$ ، و $C = 2$. والحل الخاص هو:

$$y_p = 7 - 6x + 2x^2$$

والحل العام هو: $y = y_c + y_p = 7 - 6x + 2x^2 + c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$.

المثال (3): حل المعادلة التفاضلية الآتية: $y'' - 4y = e^x + 2e^{2x}$

الحل: نجد الدالة المكملة عن طريق حل المعادلة التفاضلية: $y'' - 4y = 0$

المعادلة المساعدة التي تعادلها هي: $r^2 - 4 = (r-2)(r+2) = 0$ وجذراها هما:

$r_1 = -2$ و $r_2 = 2$ ، والدالة المكملة:

$$y_c = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x}$$

بما أنّ المؤثر الماحي للدالة في الطرف الأيمن: $e^x + 2e^{2x}$ هو $(D-1)(D-2)$ ، فعلية أنّ المعادلة التفاضلية تقابل:

$$(D-1)(D-2)(D^2-4)y = (D-1)(D-2)^2(D+2)y = 0$$

المعادلة التفاضلية التي تقابل معادلة المؤثر الماحي السابقة هي:

$$y = Ae^x + Bxe^{2x} + c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$$

عليه الحل الخاص هو: $y_p = Ae^x + Bxe^{2x}$ وباجراء المشتقة مرتين، نحصل على:

$$y_p' = Ae^x + 2Bxe^{2x} + Be^{2x}, \quad y_p'' = Ae^x + 4Bxe^{2x} + 4Be^{2x}$$

والتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على:

$$y_p'' - 4y_p = Ae^x + 4Bxe^{2x} + 4Be^{2x} - 4Ae^x - 4Bxe^{2x} = e^x + 2e^{2x}$$

أي أنّ: $y_p'' - 4y_p = -3Ae^x + 4Be^{2x} - = e^x + 2e^{2x}$

عليه إنّ: $A=-\frac{1}{3}$ و $B=\frac{1}{2}$. والحل الخاص هو: $y_p=-\frac{1}{3}e^x+\frac{1}{2}xe^{2x}$

والحل العام هو: $y=y_c+y_p=y_p=-\frac{1}{3}e^x+\frac{1}{2}xe^{2x}+\ c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}$.

المثال (4): حل المعادلة التفاضلية الآتية: $y''+4y=\sin 2x$

الحل: نجد الدالة المكملة عن طريق حل المعادلة التفاضلية: $y''+4y=0$

المعادلة المساعدة التي تعادلها هي: $r^2+4=(r-2i)(r+2i)=0$ **وجذراها هما:**

$r_1=-2i$ و $r_2=2i$ ، **والدالة المكملة:**

$$y_c=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$$

بما أنّ المؤثر الماحي للدالة في الطرف الأيمن: $\sin 2x$ **هو** (D^2+4) ، **فعلية أنّ المعادلة التفاضلية تقابل:**

$$(D^2+4)^2y=0$$

المعادلة التفاضلية التي تقابل معادلة المؤثر الماحي السابقة هي:

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+x(A\cos 2x+B\sin 2x)$$

عليه الحل الخاص هو: $y_p=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x$

وباجراء المشتقة مرتين، نحصل على:

$$y'_p=A\cos 2x-2Ax\sin 2x+B\sin 2x+2Bx\cos 2x$$
$$y''_p=-2A\sin 2x-4Ax\cos 2x-2A\sin 2x$$
$$+2B\cos 2x-4Bx\sin 2x+2B\cos 2x$$
$$=-4A\sin 2x+4B\cos 2x-4Ax\cos 2x-4Bx\sin 2x$$

والتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على:

$$y''_p+4y_p=-4A\sin 2x+4B\cos 2x-4Ax\cos 2x$$
$$-4Bx\sin 2x+4(Ax\cos 2x+Bx\sin 2x)$$
$$=-4A\sin 2x+4B\cos 2x=\sin 2x$$

أي أنّ: $A=-\frac{1}{4}$ و $B=0$. **والحل الخاص هو:** $y_p=-\frac{1}{4}x\cos 2x$

والحل العام هو:

$$y=y_c+y_p=y_p=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x \ .$$

المثال (5): حل المعادلة التفاضلية الآتية: $y'' - 4y = 1 + 65e^x \cos 2x$

الحل: نجد الدالة المكملة عن طريق حل المعادلة التفاضلية: $y'' - 4y = 0$

المعادلة المساعدة التي تعادلها هي: $r^2 - 4 = (r-2)(r+2) = 0$ **وجذراها هما:**

$r_1 = -2$ **و** $r_2 = 2$ **، والدالة المكملة:**

$$y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$$

بما أنّ المؤثر الماحي للدالة في الطرف الأيمن: $1 + 65e^x \cos 2x$ **هو** $D(D^2 - 2D + 5)y$ **،**

فعلية أنّ المعادلة التفاضلية تقابل:

$$D(D^2 - 2D + 5)(D^2 - 4)y = D(D^2 - 2D + 5)(D-2)(D+2)y = 0$$

المعادلة التفاضلية التي تقابل معادلة المؤثر الماحي السابقة هي:

$$y = A + Be^x \cos 2x + Ce^x \sin 2x + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$$

عليه الحل الخاص هو: $y_p = A + Be^x \cos 2x + Ce^x \sin 2x$

وباجراء المشتقة مرتين، نحصل على:

$$y_p' = Be^x \cos 2x - 2Be^x \sin 2x + Ce^x \sin 2x + 2Ce^x \cos 2x$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= Be^x \cos 2x - 2Be^x \sin 2x - 2Be^x \sin 2x - 4Be^x \cos 2x + \\ &\quad Ce^x \sin 2x + 2Ce^x \cos 2x + 2Ce^x \cos 2x - 4Ce^x \sin 2x \\ &= -3Be^x \cos 2x - 4Be^x \sin 2x - 3Ce^x \sin 2x + 4Ce^x \cos 2x \end{aligned}$$

والتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على:

$$\begin{aligned} & y_p'' - 4y_p \\ &= -3Be^x \cos 2x - 4Be^x \sin 2x - 3Ce^x \sin 2x \\ &\quad + 4Ce^x \cos 2x - 4(A + Be^x \cos 2x + Ce^x \sin 2x) \\ &= -4A - 7Be^x \cos 2x - 4Be^x \sin 2x - 7Ce^x \sin 2x + 4Ce^x \cos 2x \\ &= 1 + 65e^x \cos 2x \end{aligned}$$

أي أنّ: $-4A = 1$ **و** $-4B - 7C = 0$ **، و** $-7B + 4C = 65$ **ومنهـا نحصـل علـى:**

$A = -\frac{1}{4}$ **و** $B = -7$ **، و** $C = 4$**. والحل الخاص هو:**

$$y_p = -\frac{1}{4} - 7e^x \cos 2x + 4e^x \sin 2x$$

والحل العام هو:

$$y = y_c + y_p = y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{4} - 7e^x \cos 2x + 4e^x \sin 2x$$

سننتقل الآن الى طريقة عامة شاملة لحل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتب العليا بمعاملات متغيرة.

5.5 طريقة تغيير المَعْلَمَات (Variation of parameters)

لقد درسنا في البند (4.5) مواصفات حل المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة العليا ذات المعاملات المتغيرة على الفترة I :

في حالة المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ، المعادلة تصبح:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (5.11)$$

حيث $a_2(x) \neq 0$. وهذه تكافئ الصيغة القياسية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x) \qquad (5.12)$$

و $P(x)$ و $Q(x)$ دالتان متصلتان معرفتان على الفترة I .

لقد بينا في الفصل السابق أنّ الحل العام للمعادلة (5.12) هو:

$$y = y_c + y_p$$

حيث إنّ:

$$y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (5.13)$$

و $y_1(x)$ و $y_2(x)$ هي المجموعة الأساسية للحلول للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \qquad (5.14)$$

و y_p هو حل خاص للمعادلة (5.12) على الفترة I ، مطلوب ايجاده.

نفرض أنّ:

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \qquad (5.15)$$

حيث u_1 و u_2 دالتان مطلوب إيجادهما:

نشتق (5.15)، فنحصل على:

$$y'_p = u_1 y'_1 + u'_1 y_1 + u_2 y'_2 + u'_2 y_2$$

نفرض ايضاً u_1 **و** u_2 **تحقق :**

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \qquad (5.16)$$

باستخدام (5.16)، المعادلة السابقة تصبح:

$$y'_p = u_1 y'_1 + u_2 y'_2$$

نشتق مرة ثانية فنحصل على:

$$y''_p = u_1 y''_1 + u'_1 y'_1 + u_2 y''_2 + u'_2 y'_2$$

ثم نعوض في المعادلة (5.12)، فنحصل على:

$$u_1 y''_1 + u'_1 y'_1 + u_2 y''_2 + u'_2 y'_2 + P(u_1 y'_1 + u_2 y'_2) + Q(u_1 y_1 + u_2 y_2) = f(x)$$

وباجراء التبسيط، نحصل على:

$$u_1(y''_1 + Py'_1 + Qy_1) + u_2(y''_2 + Py'_2 + Qy_2) + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x)$$

وبما أنّ $y_1(x)$ **و** $y_2(x)$ **هي المجموعة الأساسية للحلول للمعادلة التفاضلية (5.14)، فعليه:**

$$y''_2 + Py'_2 + Qy_2 = 0, \quad y''_1 + Py'_1 + Qy_1 = 0$$

وعندئذٍ نحصل على:

$$u_1(0) + u_2(0) + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x)$$

أي أنّ:

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x) \qquad (5.17)$$

وبحل المعادلتين (5.16) و (5.17) نحصل على:

$$u'_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f(x)}{W}, \quad u'_1 = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f(x)}{W}, \qquad (5.18)$$

حيث إنّ:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \text{ و } W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix} \text{ و } W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix} \qquad (5.19)$$

ثم نحسب الحل الخاص y_p **باستخدام المعادلة (5.15)، ومنها نحصل على الحل العام:**

$$y = y_c + y_p$$

ملاحظة: المحدد W **هو محدد رونسكيان للحلين** y_1 **و** y_2 **، وهما المجموعة الأساسية للحلول للمعادلة التفاضلية المتجانسة (5.14) ؛ عليه يكون** $W(y_1, y_2) \neq 0$ **.**

قبل البدء باعطاء الامثلة، دعنا نحدد الخطوات المتبعة للوصول الى الحل.

الطريقة: لاستخدام طريقة تغييرالمَعْلَمَات نتبع الخطوات الآتية:

1. **نعيد كتابة المعادلة لتصبح من الصيغة (5.12)، أي معامل y'' هو 1.**
2. **نجد الدالة المكملة y_c عن طريق حل المعادلة التفاضلية المتجانسة (5.14).**
3. **نحسب محدد رونسكيان $W(y_1, y_2)$ و W_1 ، و W_2 حسب المعادلة (5.19).**
4. **نجد u_1' و u_2' باستخدام المعادلة (5.18) .**
5. **باجراء عملية التكامل نحصل على u_1 و u_2 .**
6. **نحسب الحل الخاص y_p باستخدام المعادلة (5.15).**
7. **عندئذٍ نحصل على الحل العام باستخدام: $y = y_c + y_p$**

المثال (1): جد حل المعادلة التفاضلية الآتية: $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$

الحل: نجد الدالة المكملة عن طريق حل المعادلة التفاضلية: $y'' - 4y' + 4y = 0$

المعادلة المساعدة التي تقابلها هي: $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$ **وجذراها هما:**

$r_1 = r_2 = 2$ ، **والدالة المكملة:**

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

ومنها نحصل على: $y_1 = e^{2x}$ **و** $y_2 = xe^{2x}$.

1. **نحسب محدد رونسكيان:**

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} \neq 0$$

الآن باستخدام المعادلة (5.19)، نحسب W_1 **و** W_2 **باعتبار** $f(x) = (x+1)e^{2x}$:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x+1)e^{2x} & xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = -x(x+1)e^{4x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = (x+1)e^{4x}$$

2. **وباستخدام المعادلة (5.18) ، نحصل على:**

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{x(x+1)e^{4x}}{e^{4x}} = -x^2 - x \quad \text{و} \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{(x+1)e^{4x}}{e^{4x}} = x+1$$

3. وباجراء عملية التكامل نحصل على:

$$u_1 = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{و} \quad u_2 = \frac{1}{2}x^2 + x$$

4. وباستخدام المعادلة (5.15) نحصل على الحل الخاص:

$$y_p = (-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2)e^{2x} + (\frac{1}{2}x^2 + x)xe^{2x} = \frac{1}{6}x^3e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

5. إذاً الحل العام هو: $y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$

المثال (2): جد حل المعادلة التفاضلية الآتية: $4y'' + 36y = \csc 3x$

الحل: نبدأ بقسمة المعادلة التفاضلية على 4 لتصبح ذات الصيغة (5.12):

$$y'' + 9y = \frac{1}{4}\csc 3x$$

1. نجد الدالة المكملة عن طريق حل المعادلة التفاضلية: $y'' + 9y = 0$

المعادلة المساعدة التي تعادلها هي: $r^2 + 9 = 0$ وجذراها هما: $r_{1,2} = \pm 3i$ ، والدالة المكملة:

$$y_c = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

ومنها نحصل على: $y_1 = \cos 3x$ و $y_2 = \sin 3x$.

2. نحسب محدد رونسكيان:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

الآن باستخدام المعادلة (5.19)، نحسب W_1 و W_2 باعتبار $f(x) = \frac{1}{4}\csc 3x$:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ \frac{1}{4}\csc 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad W_2 = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\sin 3x & \frac{1}{4}\csc 3x \end{vmatrix} = \frac{\cos 3x}{4\sin 3x}$$

3. باستخدام المعادلة (5.18) ، نحصل على:

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{\cos 3x}{12\sin 3x} = x+1 \quad \text{و} \quad u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{1}{12}$$

4. باجراء عملية التكامل نحصل على:

$$u_2 = \frac{1}{36}\ln|\sin 3x| \quad \text{و} \quad u_1 = -\frac{1}{12}x$$

5. وباستخدام المعادلة (5.15) نحصل على الحل الخاص:

$$y_p = -\frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\sin 3x)\ln|\sin 3x|$$

6. إذاً الحل العام هو:

$$y = y_c + y_p = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x - \frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\sin 3x)\ln|\sin 3x|$$

ملاحظة: يمكن تطبيق طريقة تغييرالمَعْلَمَات على معادلات تفاضلية خطية غير متجانسة بمعاملات متغيرة بشرط أن يعطى أحد الحلول y_1 ، أو يعطى الحلين. كما في المثال الآتي:

المثال (3): جد حل المعادلة التفاضلية الآتية على الفترة $(0,\infty)$:

$$x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x), \quad y_1 = \cos(\ln x), \quad y_2 = \sin(\ln x)$$

الحل: نبدأ بقسمة المعادلة التفاضلية على x^2 لتصبح ذات الصيغة (5.12):

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2}\sec(\ln x)$$

باعتبار أنّ: $y_1 = \cos(\ln x)$ **و** $y_2 = \sin(\ln x)$ **، فأنّ الدالة المكملة هي:**

$$y_c = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x)$$

نحسب محدد رونسكيان:

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} \cos(\ln x) & \sin(\ln x) \\ -\left(\dfrac{\sin(\ln x)}{x}\right) & \left(\dfrac{\cos(\ln x)}{x}\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \neq 0$$

الآن باستخدام المعادلة (5.19)، نحسب W_1 **و** W_2 **باعتبار** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sec(\ln x)$ **:**

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin(\ln x) \\ \dfrac{1}{x^2}\sec(\ln x) & \dfrac{\cos(\ln x)}{x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin(\ln x)}{\cos(\ln x)}\right)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos(\ln x) & 0 \\ -\dfrac{\sin(\ln x)}{x} & \dfrac{1}{x^2}\sec(\ln x) \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2}$$

باستخدام المعادلة (5.18) ، نحصل على:

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{x} \quad \text{و} \quad u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{1}{x}\left(\frac{\sin(\ln x)}{\cos(\ln x)}\right)$$

باجراء عملية التكامل نحصل على:

$$u_2 = \ln x \quad \text{و} \quad u_1 = \ln(\cos(\ln x))$$

وباستخدام المعادلة (5.15) نحصل على الحل الخاص:

$$y_p = \cos(\ln x)(\ln[\cos(\ln x)]) + (\ln x)\sin(\ln x)$$

إذاً الحل العام هو:

$$y = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x) + \cos(\ln x)(\ln[\cos(\ln x)]) + (\ln x)\sin(\ln x).$$

يمكن تطبيق طريقة تغييرالمَعْلَمَات على معادلات تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الثالثة و الرابعة وأكثر، كما سنوضح ذلك:

تأمل المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة n الآتية:

$$.\; y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x) \qquad (5.20)$$

ليكن: $y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$ **الدالة المكملة للمعادلة التفاضلية (5.20)، عندئذٍ يكون الحل الخاص :**

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + ... + u_ny_n \qquad (5.21)$$

حيث إنّ الدوال: u_k' ، $(k = 1,2,...,n)$ **تحقق المعادلات التي عددها** n **الآتية:**

$$y_1u_1' + y_2u_2' + ... + y_nu_n' = 0$$

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' + ... + y_n'u_n' = 0$$

$$\vdots$$

$$y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + ... + y_n^{(n-1)}u_n' = f(x)$$

تم الحصول على المعادلات السابقة التي عددها $(n-1)$ **كافة باستثناء الاخيرة من خلال الفرض أنها تساوي صفراً كما فعلنا في حالة الرتبة 2 عندما فرضنا** $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$ **في (5.16) لتبسيط المعادلة الناتجة من تعويض** $y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + ... + u_ny_n$ **في المعادلة التفاضلية (5.20).**

باستخدام قاعة كريمر (Cramer's rule) لحل منظومة المعادلات، نحصل على:

$$u_k' = \frac{W_k}{W}, \quad \mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$$

حيث إنّ W تمثل محدد رونسكيان للدوال: y_1 ، y_2 ،....، y_n ، و W_k هو المحدد الناتج من ابدال العمود الذي رتبته k في محدد رونسكيان بالعمود الذي يمثل الطرف الأيمن من منظومة المعادلات، أي العمود $(0, 0, \ldots, f(x))$.

عندما $n = 2$ نحصل على (5.18). وعندما $n = 3$ ، نحصل على:

$$u_1' = \frac{W_1}{W}, \quad u_2' = \frac{W_2}{W}, \quad u_3' = \frac{W_3}{W} \tag{5.22}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ f(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & f(x) \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & f(x) & y_3'' \end{vmatrix} \quad \text{و}$$

ثم نحسب الحل الخاص y_p باستخدام المعادلة (5.21)، ومنها نحصل على الحل العام:

$y = y_c + y_p$.

سنكتفي باعطاء مثال واحد على معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة.

المثال (4): حل المعادلة التفاضلية الآتية: $y''' + y' = \tan x$

الحل: نجد الدالة المكملة عن طريق حل المعادلة التفاضلية: $y''' + y' = 0$

المعادلة المساعدة التي تعادلها هي: $r^3 + r = r(r^2 + 1) = 0$ وجذورها: $r_1 = 0$ و $r_{2,3} = \pm i$ ،

والدالة المكملة:

$$y_c = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

ومنها نحصل على: $y_1 = 1$ و $y_2 = \cos x$ و $y_3 = \sin x$.

نحسب محدد رونسكيان:

$$W=\begin{vmatrix}1 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ 0 & -\cos x & -\sin x\end{vmatrix}=\sin^2 x+\cos^2 x=1\neq 0$$

الآن باستخدام المعادلة (5.19)، نحسب W_1 **و** W_2 **و** W_3 **باعتبار** $f(x)=\tan x$ **:**

$$W_1=\begin{vmatrix}0 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ \tan x & -\cos x & -\sin x\end{vmatrix}=\tan x(\cos^2 x+\sin^2 x)=\tan x$$

$$W_2=\begin{vmatrix}1 & 0 & \sin x\\ 0 & 0 & \cos x\\ 0 & \tan x & -\sin x\end{vmatrix}=(-\cos x)(\tan x)=-\sin x$$

$$W_3=\begin{vmatrix}1 & \cos x & 0\\ 0 & -\sin x & 0\\ 0 & -\cos x & \tan x\end{vmatrix}=(-\sin x)(\tan x)$$

باستخدام المعادلة (5.18) ، نحصل على:

$$u_3'=\frac{W_3}{W}=-\frac{\sin^2 x}{\cos x}=-\sec x+\cos x \quad \text{و} \quad u_2'=\frac{W_2}{W}=-\sin x \quad \text{و} \quad u_1'=\frac{W_1}{W}=\tan x$$

باجراء عملية التكامل نحصل على:

$$u_3=\sin x-\ln|\sec x+\tan x| \quad \text{و} \quad u_2=\cos x \quad \text{و} \quad u_1=-\ln|\cos x|$$

وباستخدام المعادلة (5.15) نحصل على الحل الخاص:

$$\begin{aligned} y_p&=-\ln|\cos x|+\cos^2 x+\sin^2 x-\sin x\ln|\sec x+\tan x|\\ &=-\ln|\cos x|-\sin x\ln|\sec x+\tan x|+1\end{aligned}$$

إذاً الحل العام هو:

$$y=y_c+y_p=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x-\ln|\cos x|-\sin x\ln|\sec x+\tan x|$$

لقد لاحظنا من خلال تناولنا الطرائق السابقة لحل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة انه ما زلنا نفتقر الى طريقة عامة لحل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة بمعاملات متغيرة.

تعتبر الطرائق الثلاث التي تناولناها خاصة وعليها شروط: في حال طريقة المعاملات غير المحددة، وطريقة المؤثر التفاضلي ايضاً، لقد اشترطنا على المعادلة التفاضلية أن تكون بمعاملات ثوابت و الدالة في الطرف الأيمن لها مواصفات محددة؛ كما اشترطنا في حالة طريقة تغيير المَعْلَمَات أن تكون المعاملات ثوابت أو متغيرة ولكن تعطى احد الحلول. في الحقيقة تعتبر طريقة تغيير المَعْلَمَات من افضل الطرق لشموليتها مجموعة واسعة من المعادلات التفاضلية وقلة الشروط على المعادلات التي تتولى حلها.

الآن سنتناول طريقة اخرى لحل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة ومعاملاتها متغيرة ولكن من نمط خاص (المعاملات من نوع: $a_n(x) = a_n x^n$) ، تنسب هذه المعادلة الى كل من كوشي وأويلر:

5.6 معادلة كوشي – أويلر (Cauchy-Euler equation)

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية n من النمط:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x), \qquad (5.23)$$

حيث: a_0 و a_1 ...و a_n ثوابت، وأنّ $a_n \neq 0$ ، تسمى "معادلة كوشي– أويلر".

نلاحظ أنّ $x = 0$ هي نقطة منفردة للمعادلة التفاضلية (5.23)، عليه نفرض أنّ: $x > 0$.

في حالة الرتبة الثانية، المعادلة (5.23) تصبح:

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = g(x) \qquad (5.24)$$

حيث إنّ a و b ، و c ثوابت حقيقية، وإنّ $a \neq 0$.

سنبدأ بالحالة التي فيها الطرف الأيمن $g(x) = 0$ ، أي المعادلة التفاضلية الخطية متجانسة:

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0، \quad x > 0 \qquad (5.25)$$

نفرض أنّ الحل من النمط: $y = x^r \neq 0$ حيث إنّ r ثابت المطلوب إيجاده. نشتق الحل مرتين ونعوض في المعادلة السابقة، نحصل على:

$$ar(r-1)x^r + brx^r + cx^r = 0$$

بالقسمة على x^r ، لأنّ $x \neq 0$ لجميع قيم x ، نحصل على:

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0 \qquad (5.26)$$

وهي معادلة جبرية يمكن حلها وحساب الجذور، كما يأتي:

$$r=\frac{-(b-a)\pm\sqrt{(b-a)^2-4ac}}{2a}$$

هنالك ثلاثة احتمالات، تبعاً للمقدار الجبري $\left((b-a)^2-4ac\right)$ موجب أم سالب أم صفر.

الحالة الأولى: جذران حقيقيان مختلفان

إذا كان $\left((b-a)^2-4ac\right)>0$ ، فعندئذٍ نحصل على جذرين حقيقين مختلفين للمعادلة (5.26)، وهما:

$$r_1=\frac{a-b+\sqrt{\left((b-a)^2-4ac\right)}}{2a} \quad \text{و} \quad r_2=\frac{a-b-\sqrt{\left((b-a)^2-4ac\right)}}{2a}$$

ويكون الحلان هما:

$$y_1=x^{r_1} \quad \text{و} \quad y_2=x^{r_2}$$

لاحظ أنّ الحلين مستقلان خطياً حسب محدد رونسكيان ولأنّ $r_1\neq r_2$. أي أن الحلين هما المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية (5.25). وأنّ الحل العام هو:

$$y=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2} \qquad (5.27)$$

المثال (1): جد حل المعادلة التفاضلية : $x>0$ ، $x^2y''+3xy'-8y=0$

الحل: المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي:

$$r(r-1)+3r-8=r^2+2r-8=(r+4)(r-2)=0$$

إذاً $r_1=-4$ و $r_2=2$ ، وعليه فالحل العام:

$$y=c_1x^{-4}+c_2x^2$$

الحالة الثانية: جذران حقيقيان متساويان

إذا كان $\left((b-a)^2-4ac\right)=0$، فعندئذٍ نحصل على جذرين حقيقين متساويين للمعادلة (5.26)، وهما:

$$r_1=r_2=\frac{a-b}{2a}=r\Rightarrow 2r=1-\frac{b}{a}$$

ويكون الحل الأول هو: $y=x^r=x^{\frac{a-b}{2a}}$

أما الحل الثاني، فيمكن حسابه باستخدام طريقة اختزال الرتبة، أي القانون (5.4) كما يأتي:

نعيد كتابة المعادلة التفاضلية (5.25) ، لتصبح:

$$y'' + \frac{b}{ax} y' + \frac{c}{ax^2} y = 0 ، \qquad x > 0$$

عندئذٍ، باستخدام القانون (5.4) نحصل على:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx = x^r \int \frac{e^{-\int \frac{b}{ax} dx}}{x^{2r}} dx$$

$$= x^r \int \frac{e^{-\frac{b}{a}\ln x}}{x^{2r}} dx = x^r \int \frac{x^{-\frac{b}{a}}}{x^{2r}} dx = x^r \int \frac{1}{x} dx = x^r \ln x$$

لأنّ $\frac{b}{a} + 2r = 1$. عليه فإنّ الحلين هما: $y_1 = x^r$ و $y_2 = x^r \ln x$.

لاحظ أنّ الحلين مستقلان خطياً حسب محدد رونسكيان . أي أنّ الحلين هما المجموعة الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية (5.25). وأنّ الحل العام هو:

$$y = c_1 x^r + c_2 x^r \ln x \qquad (5.28)$$

المثال (2): جد حل المعادلة التفاضلية : $x^2 y'' + 3xy' + y = 0 ، \quad x > 0$

الحل: المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي:

$$r(r-1) + 3r + 1 = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$$

إذاً $r_1 = r_2 = -1$ ، وعليه حسب المعادلة (5.28) فالحل العام:

$$y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-1} \ln x$$

الحالة الثالثة: جذران عقديان أحدهما مرافق الآخر

إذا كان $\left((b-a)^2 - 4ac\right) < 0$ ، فعندئذٍ نحصل على جذرين عقديين أحدهما مرافق للآخر للمعادلة (5.26)، وهما:

$$r_{1,2} = \frac{a - b \pm \sqrt{\left((b-a)^2 - 4ac\right)}}{2a} = \frac{a - b \pm i\sqrt{4ac - (b-a)^2}}{2a}$$

$$= \frac{a-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - (b-a)^2}}{2a}$$

نفــرض $r_1=\alpha+i\beta,\ r_2=\alpha-i\beta$ ، حيــث إنّ: $\alpha=\dfrac{a-b}{2a}$ و $\beta=\dfrac{\sqrt{4ac-(b-a)^2}}{2a}$ عددان حقيقيان و $\beta>0$.

أي أنّ الجذرين هما: $r_1=\alpha+i\beta$ ، و $r_2=\overline{r_1}=\alpha-i\beta$. عليه يكون الحلان هما:

$$y_1=x^{(\alpha+i\beta)} \quad \text{و} \quad y_2=x^{(\alpha-i\beta)}$$

وأنّ الحل العام هو:

$$y=C_1x^{(\alpha+i\beta)}+C_1x^{(\alpha-i\beta)} \qquad (5.29)$$

يمكن اعادة كتابة الحل (5.29) بصيغة اكثر ملاء مة للتطبيق في الفصول القادمة بالاستعانةً بصيغة اويلر (Euler's formula) الآتية:

$$x^{i\theta}=e^{\ln x^{i\theta}}=e^{i\theta\ln x}=\cos(\theta\ln x)+i\sin(\theta\ln x)$$

ومنها نحصل على:

$$x^{-i\theta}=\cos(\theta\ln x)-i\sin(\theta\ln x)$$

عليه يمكن تبسيط المعادلة (5.29) لتأخذ الصيغة:

$$y=C_1x^{\alpha}x^{i\beta}+C_2x^{\alpha}x^{-i\beta}=x^{\alpha}(C_1x^{i\beta}+C_2x^{-i\beta})$$

$$=x^{\alpha}\left(C_1[(\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x)]+C_2[\cos(\beta\ln x)-i\sin(\beta\ln x)\right)$$

$$=x^{\alpha}\left((C_1+C_2)\cos(\beta\ln x)+i(C_1-C_2)\sin(\beta\ln x)\right)$$

إذاً الحل هو:

$$y=x^{\alpha}[c_1\cos(\beta\ln x)+c_2\sin(\beta\ln x)] \qquad (5.30)$$

حيث إنّ: $c_1=C_1+C_2$ و $c_2=i(C_1-C_2)$ هي ثوابت.

المثال (3): جد حل المعادلة التفاضلية : $x>0$ ، $x^2y''+5xy'+20y=0$

الحل: المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي:

$$r(r-1)+5r+20=r^2+4r+20=0$$

إذاً

$$r_1,r_2=\frac{-4\pm i\sqrt{16-4(20)}}{2}=\frac{-4\pm i\sqrt{-64}}{2}=-2\pm 4i$$

أي: $\alpha=-2$ و $\beta=4$ ، عليه حسب المعادلة (5.30) فالحل العام:

$$y=x^{-2}[c_1\cos(4\ln x)+c_2\sin(4\ln x)] \ .$$

في حالة كون المعادلة التفاضلية خطية غير متجانسة من نوع كوشي – أويلر (5.24)، عندئذٍ نستخدم طريقة تغيير المَعْلَمَات لحلها، كما في المثال الآتي:

المثال (4): جد حل المعادلة التفاضلية : $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4e^x$ ، $x > 0$

الحل: المعادلة المساعدة التي تقابل المعادلة التفاضلية هي:

$$r(r-1) - 3r + 3 = r^2 - 4r + 3 = 0$$

أي أنّ: $r_1 = 1$ **و** $r_2 = 3$ ، **عليه حسب المعادلة (5.27) فالدالة المكملة:**

$$y_c = c_1x^1 + c_2x^3$$

ومنها نحصل على: $y_1 = x$ **و** $y_2 = x^3$.

نحسب محدد رونسكيان: $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3 \neq 0$

بالقسمة على x^2 **تصبح المعادلة التفاضلية:** $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2e^x$

الآن باستخدام المعادلة (5.19)، نحسب W_1 **و** W_2 **باعتبار** $f(x) = 2x^2e^x$ **:**

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2e^x & 3x^2 \end{vmatrix} = -2x^5e^x \quad \text{و} \quad W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{vmatrix} = 2x^3e^x$$

باستخدام المعادلة (5.18) ، نحصل على:

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{2x^3e^x}{2x^3} = e^x \quad \text{و} \quad u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{2x^5e^x}{2x^3} = -x^2e^x$$

باجراء عملية التكامل نحصل على:

$$u_2 = \int e^x dx = e^x \quad \text{و} \quad u_1 = -\int x^2e^x dx = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x$$

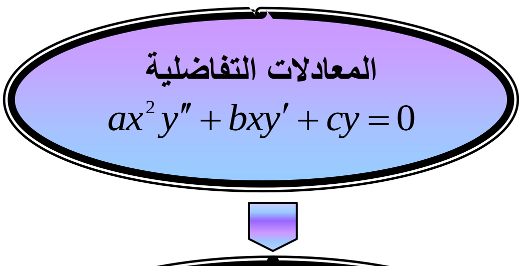
وباستخدام المعادلة (5.15) نحصل على الحل الخاص:

$$y_p = (-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x)x + e^xx^3 = 2x^2e^x - 2xe^x$$

إذاً الحل العام هو: $y = y_c + y_p = c_1x + c_2x^3 + 2x^2e^x - 2xe^x$

يمكن تلخيص الحالات الثلاث السابقة كما في المخطط الآتي:

المخطط الانسيابي لحل المعادلات المتجانسة من نمط كوشي - أويلر



5.7 المخرجات التعليمية للفصل (Learning outcomes)

بعد الانتهاء من دراسة الفصل الخامس يكون الطالب قد اتقن المخرجات التعليمية الآتية:

1. **التمييز بين المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا المتجانسة عن غير المتجانسة.**
2. **التمييز بين المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا المتجانسة بمعاملات ثوابت عن تلك بمعاملات متغيرة.**
3. **التعرف على الطرائق المتعددة لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة العليا.**
4. **إيجاد حلول معادلات تفاضلية بطريقة اختزال الرتبة.**
5. **إيجاد حلول معادلات تفاضلية من الرتب العليا المتجانسة بمعاملات ثوابت.**
6. **استخدام طريقة المعاملات غير المحددة لحل نمط محدد من المعادلات التفاضلية غير متجانسة برتب عليا.**
7. **التعرف على المؤثرات التفاضلية وربطها بالمعادلات التفاضلية.**
8. **استخدام طريقة المؤثرات التفاضلية لحل نمط محدد من المعادلات التفاضلية غير متجانسة برتب عليا.**
9. **إيجاد حل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة من الرتبة الثانية بطريقة تغييرالمَعْلَمَات.**
10. **استخدام طريقة تغييرالمَعْلَمَات لإيجاد حل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة من الرتبة الثالثة وأكثر.**
11. **إيجاد حلول معادلات تفاضلية من نوع كوشي - أويلر.**
12. **تمييز المعادلات التفاضلية برتب عليا التي يمكن حلها بالطرائق القياسية السابقة عن غيرها.**

13. فهم الطرائق المتعددة التي تمكن الطالب من الانتقال الى الفصل السادس واستخدامها في التطبيقات.
14. المقدرة على استخدام القرص الممغنط المرافق للكتاب لمراجعة محتويات الكتاب والتعرف على أمثلة واقعية.

تمارين الفصل الخامس

جد الحل الثاني لكل من المعادلات من 1- 13 ، ثم اكتب الحل العام:

.1 $y''-4y'+4y=0 \quad , \quad y_1=e^{2x}$

.2 $y''+5y'=0 \quad , \quad y_1=1$

.3 $y''+16y=0 \quad , \quad y_1=\cos 4x$

.4 $y''-y=0 \quad , \quad y_1=\cosh x$

.5 $9y''-12y'+4y=0 \quad , \quad y_1=e^{2x/3}$

.6 $x^2y''-7xy'+16y=0 \quad , \quad y_1=x^4$

.7 $xy''+y'=0, \quad y_1=\ln x$

.8 $(1-2x-x^2)y''+2(1+x)y'-2y=0 \quad , y_1=x+1$

.9 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+2y=0 \quad , \quad y_1=x\sin(\ln x)$

.10 $y''-3\tan x\, y'=0 \quad , \quad y_1=1$

.11 $x\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+x^2y=0 \quad , \quad y_1=xe^{-x}$

.12 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+y=0 \quad , \quad y_1=\cos(\ln x)$

.13 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}-6y=0 \quad , \quad y_1=x^2$

.14 ليكن $y=e^{mx}$ **هو الحل الأول للمعادلة** $ay''+2\sqrt{ac}\,y'+cy=0$ **أثبت أنّ الحل الثاني هو** $y=xe^{mx}$ **.**

جد الحل العام لكل من المعادلات من 15- 27 :

15. $4y'' + y' = 0$

16. $y'' - 36y = 0$

17. $y'' + 9y = 0$

18. $y'' - y' - 6y = 0$

19. $y'' + 8y' + 16y = 0$

20. $y'' + 3y' - 5y = 0$

21. $12y'' - 5y' - 2y = 0$

22. $y'' + 4y' - y = 0$

23. $y'' - 4y' + 5y = 0$

24. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

25. $3y'' + 2y' + y = 0$

26. $y^{(4)} - 7y'' - 18y = 0$

27. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

حل المعادلات من 28 - 33 مع شروطها الابتدائية :

28. $y'' + 16y = 0 \quad , \quad y(0) = 2 \quad , \quad y'(0) = -2$

29. $y'' + 6y' + 5y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 3$

30. $2y'' - 2y' + y = 0 \quad , y(0) = -1 \quad , y'(0) = 0$

31. $y'' + y' + 2y = 0 \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0$

32. $y'' - 3y' + 2y = 0 \quad , \quad y(1) = 0 , y'(1) = 1$

33. $y''' + 12y'' + 36y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, \; y''(0) = \text{-}7$.

حل المعادلات من 34- 36 مع شروطها الحدودية :

34. $y'' - 10y' + 25y = 0 \quad , y(0) = 1 \quad , y(1) = 0$

35. $y'' + y = 0 \quad , \quad y'(0) = 0 \quad , \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

36. $y'' - 2y' + 2y = 0, \; y(0) = 1, \; y(\pi) = 1$

حل المعادلات من 37- 48 بطريقة المعاملات غير المحددة :

.37 $y'' + 3y' + 2y = 6$

.38 $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$

.39 $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$

.40 $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$

.41 $y'' - y' = -3$

.42 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{\frac{1}{2}x}$

.43 $y'' + 4y = 3\sin 2x$

.44 $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}(\cos x - 3\sin x)$

.45 $y'' + y = 2x\sin x$

.46 $y'' + 2y' - 24y = 16 - (x+2)e^{4x}$

.47 $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$

.48 $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^{x}$

حل مسائل القيم الابتدائية من 49- 54 :

.49 $y'' + y = -2 \quad , y(\pi/8) = 1/2 \quad , y'(\pi/8) = 2$

.50 $y'' - 2y' - 3y = 2\cos^2 x \quad , y(0) = -1/3 \quad , y'(0) = 0$

.51 $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1$

.52 $2y'' + 3y' - 2y = 14x^2 - 4x - 11, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

.53 $y'' + y' = \cos x - \sin 2x, \quad y(0) = -\frac{1}{6}, \quad y'(0) = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}$

.54 $y'' + 4y' + 4y = (3+x)e^{-2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$

اكتب المعادلات من 55- 60 بصيغة $L(y) = g(x)$ **، حيث إنّ** L **هو المؤثر التفاضلي:**

.55 $9y'' - 4y = \sin x$

.56 $y'' - 5y = x^2 - 2x$

.57 $y'' - 4y' - 12y = x - 6$

58. $2y'' - 3y' - 2y = 1$

59. $y''' + 10y'' + 25y' = e^x$

60. $y''' + 4y'' + 3y' = x^2 \cos x - 3x$

جد المؤثر التفاضلي الماحي للدوال من 61- 68 :

61. $1 + 6x - 2x^3$

62. $(1-5x)x^3$

63. $1 + 7e^{2x}$

64. $x + 3xe^{6x}$

65. $\cos 2x$

66. $1 + \sin x$

67. $e^{-x} + 2xe^x - x^2e^x$

68. $e^{-x}\sin x - e^{2x}\cos x$

استخدم طريقة المؤثرات التفاضلية لحل المعادلات التفاضلية من 69- 83 :

69. $y'' - 9y = 54$

70. $2y'' - 7y' + 5y = -29$

71. $y'' + y' = 3$

72. $y''' + 2y'' + y' = 10$

73. $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

74. $y''' + y'' = 8x^2$

75. $y'' - y' - 12y = e^{4x}$

76. $y'' + 2y' + 2y = 5e^{6x}$

77. $y'' - 2y' - 3y = 4e^x - 9$

78. $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x} + 2x$

79. $y'' + 25y = 6\sin x$

80. $y'' + 4y = 4\cos x + 3\sin x - 8$

81. $y'' - y = x^2e^x + 5$

.82 $y'' + y' + \frac{1}{4}y = e^x(\sin 3x - \cos 3x)$

.83 $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin x$

حل المعادلات من 84- 96 بطريقة تغييرالمَعْلَمَات:

.84 $y'' + y = \sec x$

.85 $y'' + y = \sin x$

.86 $y'' + y = \cos^2 x$

.87 $y'' - y = \cosh x$

.88 $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$

.89 $y'' + 3y' + 2y = 1/(1+e^x)$

.90 $y'' + 3y' + 2y = \sin e^x$

.91 $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$

.92 $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

.93 $3y'' - 6y' + 30y = e^x \tan 3x$

.94 $x^4 y'' + x^3 y' - 4x^2 y = 1, \quad y_1 = x^2$

.95 $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = x^{\frac{3}{2}}, \quad y_1 = x^{-\frac{1}{2}} \cos x, \quad y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \sin x$

.96 $y''' + 4y' = \sec 2x$.

حل المعادلات التفاضلية من 97- 100 بطريقة تغييرالمَعْلَمَات وفق الشرطين الابتدائيين:

$y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0$

.97 $4y'' - y = xe^{x/2}$

.98 $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}$

.99 $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$

.100 $2y'' + y' - y = x + 1$

حل المعادلات التفاضلية من 101- 120 ، ثم جد الحل العام عندما $x>0$:

101. $x^2y''+xy'-y=0$

102. $x^2y''-xy'+y=0$

103. $4x^2y''-3y=0$

104. $x^2y''+xy'+y=0$

105. $9x^2y''+15xy'+y=0$

106. $x^2y''+3xy'+5y=0$

107. $x^2y''-3xy'+5y=0$

108. $x^2y''-3xy'+13y=4+3x$

109. $3x^2y''-3xy'+y=0$

110. $x^4y^{(4)}+6x^3y'''+9x^2y''+3xy'+y=0$

111. $x^2y''+xy'-y=x^2$

112. $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=3+\ln x^3$

113. $x^2y''-xy'+y=x^2$

114. $x^2y''-4xy'+6y=0,\quad y(-2)=8,\ y'(-2)=0$

115. $x^3y'''+xy'-y=0$

116. $x^2y''+4xy'=0,\quad y(1)=0,\ y'(1)=6$

117. $x^4y^{(4)}+6x^3y'''=0$

118. $x^2y''-5xy'+8y=0,\quad y(2)=32,\ y'(2)=0$

119. $x^2y''+xy'+y=0,\quad y(1)=1,\ y'(1)=2$

120. $x^2y''-5xy'+8y=8x^6,\quad y(\frac{1}{2})=0,\ y'(\frac{1}{2})=0$

121. ليكن $y=x^m$ الحل الأول للمعادلة $ax^2y''+bxy'+cy=0$. أ ثبت أنّ الحل الثـاني هو $y=x^m\ln x$.