الفصل السادس

تطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتب العليا

Application of higher order differential equations

بعد أن تناولنا في الفصل السابق الطرائق الأساسية لحل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الرتب العليا المتجانسة وغير المتجانسة، في هذا الفصل سنستخدم تلك الطرق في التطبيقات. سنركز على التطبيقات التي تشمل الاهتزاز الحر والاهتزاز الحر المخمد، والاهتزاز القسري المخمد. كما نتناول تطبيقات على هندسة الجسور ومناقشة حالة الرنين المطلق ومعادلة الكوارث التي أدت الى سقوط جسر تاكوما الشهير، الذي سنتحدث عن سبب سقوطه أيضاً. واخيراً نتناول تطبيقات على الدارات الكهربائية التي تحتوي على محاثة ومقاومة ومتسعة ، والقوة الدافعة الكهربائية.

6.1 الاهتزاز الحر (Free vibration)

ليكن لدينا نابض حلزوني معلق من إحدى نهايتيه في سقف صلب، لا يتأثر بالاهتزاز ومستقر، بشكل عمودي. علق في نهايته الآخرى الحرة جسم كتلته m ، فسبب زيادة في طول النابض الحلزوني مقدارها s . فحسب قانون هوك (Hooke's law) الذي ينص على أنّ مقدار الاستطالة يتناسب مع قيمة القوة المسلطة F . أي أنّ:

$$F \propto s \Rightarrow F = k\,s$$

حيث إنّ k ثابت التناسب يستنبط بطرق عملية ويقاس بالمختبرات، ويعتمد على المادة التي صنع منها النابض الحلزوني وعلى امور اخرى لا داعي لذكرها في هذا المجال، ويسمى ثابت النابض أو ثابت القوة.

المثال (1): نابض حلزوني إحدى نهايتيه معلقة بسقف صلب ومستقر بشكل عمودي، سحب نحو الاسفل بقوة مقدارها 10 نيوتن فسببت زيادة في طوله $\frac{1}{8}$ متر. احسب ثابت النابض الحلزوني؟ ثم احسب الزيادة في طول النابض الحلزوني المتسببة نتيجة تعليق جسم يزن 16 نيوتن في نهايته الحرة.

الحل: باستخدام قانون هوك: $F = k\,s$ ، نحصل على: $10 = k(\frac{1}{8})$ ، ومنها نجد أنّ ثابت النابض يساوي 80 نيوتن/متر.

الزيادة في طول النابض الحلزوني المتسببة نتيجة تعليق الجسم هي:

$$s=\frac{F}{k}=\frac{16}{80}=\frac{1}{5}=0.2 \quad \text{(متر)}$$

إنّ القوة المؤثرة في الكتلة m كغم (سلج) واتجاهها نحو الاسفل هي قوة الجاذبية الأرضية ومقدارها:

$$W=mg$$

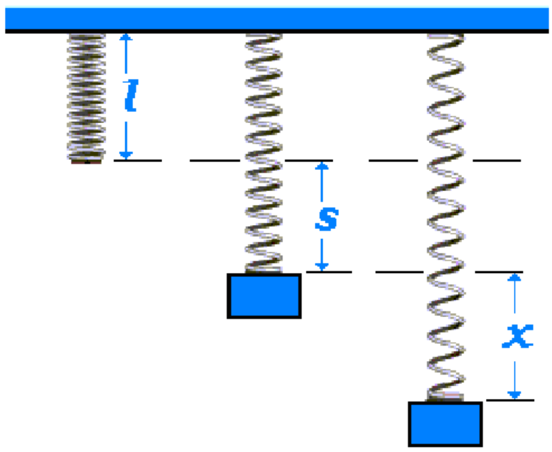
حيث إنّ g يمثل التعجيل الارضي ومقداره: 9.8 متر/ثا^2 او 32 قدم/ثا^2 و W نيوتن (رطل)، تمثل وزن الجسم .

ملاحظة: من المفضل استخدام نظام الوحدات العالمي (IS) ولكن حين يستخدم الطالب هذا النظام في هذا الفصل يجد صعوبة في التعامل مع الكسور العشرية وخاصة عند حساب جذور المعادلات الجبرية التي تقابل المعادلات التفاضلية كما سنبين ذلك عند تناولنا بعضاً من هذه الأمثلة، في حين عند استخدامنا لنظام الوحدات البريطاني فإنّ الأرقام المستخدمة هي أعداد بسيطة وسهلة التعامل والحساب. ونظراً لكون الكتاب يهدف الى حل المعادلات التفاضلية واستخدامها في التطبيقات وحيث لا نريد تشتيت ذهن الطالب ونبعده عن الهدف الأساس، سنستخدم في كثير من الاحيان النظام البريطاني وفي بعض الاحيان النظام العالمي لبيان الفرق بين النظامين من حيث سهولة التعامل مع الحسابات. لاحظ نظام الوحدات في البند (3.2).

لنفرض أنّ جسماً كتلته m علق في النهاية الحرة للنابض الحلزوني فسبب زيادة في الطول قدرها s متر(قدم) ثم استقر الجسم المعلق. يسمى هذا بوضع الاتزان او الاستقرار ويحصل عادة عندما يكون هنالك قوتان مسلطتان على الجسم متساويتان في المقدار ومختلفتان بالاتجاه. لنفرض أنّ الاتجاه الموجب هو نحو الأسفل، فعند وضع الاتزان يكون:

$$mg-ks=0 \quad \text{او} \quad mg=ks$$

كما في الشكل (6.1) .



الشكل (6.1)

الآن إذا سلطنا قوة على الجسم المعلق بالنابض الحلزوني باتجاه الأسفل (أو الأعلى) فأزاحته بمقدار x متر(قدم)، ثم ترك يهتز بحركة توافقية بسيطة (Simple harmonic motion) أي اهتزاز حرّ .
لنتفق على أنه إذا سحب الجسم نحو الأسفل فإنّ x موجبة وإذا دفع باتجاه الأعلى فإنّ x سالبة، في هذه الحالة ستكون هنالك قوتان تؤثر في الجسم:

- الأولى باتجاه الاسفل وهي موجبة وتساوي mg ،
- الثانية باتجاه الأعلى وهي سالبة تسمى بالقوة المعيدة وحسب قانون هوك تتناسب مع الزيادة في الطول، أي تساوي $-k(s+x)$.

فحسب قانون نيوتن الثاني، نحصل على المعادلة الآتية:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(s+x) = mg - ks - kx = (mg - ks) - kx = 0 - kx = -kx$$

الاشارة السالبة في المعادلة السابقة تعني أنّ القوة تؤثر باتجاه معاكس، كما اهملنا الاحتكاك أو الإعاقة أو ايّ عوامل خارجية، في الوقت الحالي.
عندئذٍ نحصل على المعادلة التفاضلية:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0$$

وبالقسمة على m ، وفرض أنّ $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ، نحصل على المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثوابت:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (6.1)$$

التي حلها:

$$x(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) \qquad (6.2)$$

تسمى المعادلة التفاضلية (6.1) بمعادلة الاهتزاز الحرالتفاضلية أو معادلة الحركة التوافقية البسيطة؛ ويسمى حلها (6.2) بمعادلة الاهتزاز الحر.
تدعى ω بالتردد الزاوي الطبيعي (Natural angular frequency) التي تعتمد على خواص الجسم، فمثلاً التردد الزاوي الطبيعي لبندول بسيط طوله l يهتز في مكان تعجيله الارضي g هو:

والتردد الزاوي الطبيعي لكتلة m معلقة من الطرف الحر لنابض حلزوني، كما لاحظنا $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

سابقاً هو: $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

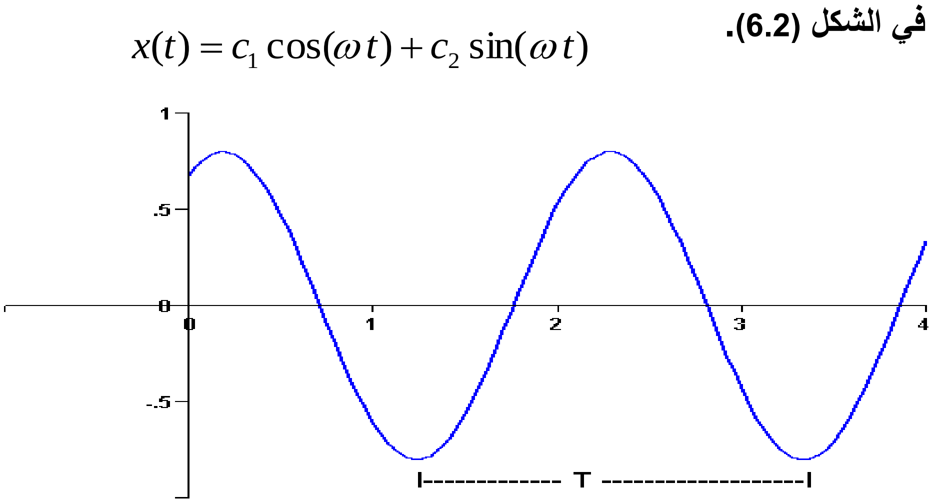
يمكننا حساب عدد مرات اهتزاز المنظومة خلال ثانية واحدة، ويسمى "تردد المنظومة" ويرمز لها بالرمز f ؛ ويعرّف كما يأتي:

$$f=\frac{\omega}{2\pi} \qquad (6.3)$$

وحساب "زمن الدورة الواحدة" (Period) ويرمز له بالرمز T ، ويعرف كما يأتي:

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \qquad (6.4)$$

كما موضح في الشكل (6.2).



الشكل (6.2)

المثال (2): احسب التردد الزاوي الطبيعي وتردد المنظومة وزمن الدورة الواحدة لمعادلة الاهتزاز الحر:

$$x(t)=2\cos(3\pi t)-4\sin(3\pi t)$$

الحل: من المعادلة السابقة نستنتج أن التردد الزاوي الطبيعي هو: $\omega=3\pi$ ، وأن زمن الدورة الواحدة يساوي:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3} \text{ (ثانية)}$$

أي أنّ الجسم يحتاج الى زمن قدره $\frac{2}{3}$ ثانية لإكمال دورته.

وتردد المنظومة يساوي:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi}{2\pi} = \frac{3}{2}$$

أي أنّ التردد وهو عدد الدورات (الهزات او الذبذبات) في الثانية الواحدة = $\frac{3}{2}$ دورة.

إذا اضفنا الشرطين الابتدائيين الآتيين الى معادلة الاهتزاز الحر (6.2):

$$x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta$$

حيث إنّ α و β ثابتان حقيقيان، فعندئذٍ نحصل على الحل الخاص لمعادلة الاهتزاز الحر. إنّ الثابت α يمثل موقع الجسم لحظة البدء بالاهتزاز بالنسبة الى محور- t الذي يسمى خط الاتزان، وكونه موجباً أم سالباً أم صفراً يحدد موقع الجسم قبيل الاهتزاز؛ كذلك إنّ الثابت β يمثل اتجاه حركة الجسم وسرعته لحظة البدء بالاهتزاز وكونه موجب أم سالب أم صفر يحدد اتجاه حركة الاهتزاز تصاعدياً أم تنازلياً أم احد النهايتين العظمى أو الصغرى، كما في الجدول الآتي:

الجدول (1)

اشارة α	اشارة β	وضع الجسم قبيل بدء الاهتزاز
+	+	الجسم تحت خط الاتزان، ينطلق بسرعة نحو الأسفل
+	0	الجسم تحت خط الاتزان، ينطلق من السكون (بسرعة صفر)
+	-	الجسم تحت خط الاتزان، ينطلق بسرعة نحو الأعلى
0	+	الجسم عند خط الاتزان، ينطلق بسرعة نحو الأسفل
0	0	الجسم عند خط الاتزان، ينطلق من السكون (بسرعة صفر). لا يوجد اهتزاز
0	-	الجسم عند خط الاتزان، ينطلق بسرعة نحو الأعلى
-	+	الجسم فوق خط الاتزان، ينطلق بسرعة نحو الأسفل
-	0	الجسم فوق خط الاتزان، ينطلق من السكون (بسرعة صفر)
-	-	الجسم فوق خط الاتزان، ينطلق بسرعة نحو الأعلى

المثال (3): علق جسم يزن رطلين في النهاية الحرة للنابض الحلزوني فسبب زيادة في الطول قدرها 6 إنجات ثم استقر الجسم المعلق. سحب الجسم بمقدار 8 إنجات باتجاه الأسفل واطلق بسرعة مقدارها $\frac{4}{3}$ قدم/ثا باتجاه الأعلى. جد معادلة الاهتزاز الحر؟ ثم احسب التردد وزمن الدورة الكاملة.

الحل: لنبدأ بتحديد المعطيات، وتحويل الانجات الى اقدام باعتبارالقدم الواحد = 12 انج:

(رطل) $W = 2$ **و** **(قدم)** $\frac{1}{2} = \frac{6}{12} =$ **(انج)** $s = 6$ ، **و** **(قدم)** $x(0) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ،

و قدم/ثا $x'(0) = (\frac{-4}{3})$ **. ومنها نحصل على:**

(سلج) $m = \frac{W}{g} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ **و** $k = \frac{W}{s} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$ **. ومنها نحصل على:**

$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{4}{(\frac{1}{16})} = 64$ **.**

أي أنّ المعادلة التفاضلية التي تمثل الاهتزاز، حسب المعادلة (6.1)، هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0 ,$$

وأنّ حلها حسب المعادلة (6.2) يمثل معادلة الاهتزاز الحر:

$$x(t) = c_1\cos(8t) + c_2\sin(8t) .$$

لإيجاد قيمة c_1 **و** c_2 **، نعوض في الشروط الابتدائية، فنحصل على:**

$$x(0) = c_1\cos(0) + c_2\sin(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{3}$$

الآن نشتق، فنحصل على:

$$x'(t) = -8c_1\sin(8t) + 8c_2\cos(8t)$$

وبالتعويض بالشرط الابتدائي: $x'(0) = (\frac{-4}{3})$ **قدم ، نحصل على:**

$$x'(0) = -8c_1\sin(0) + 8c_2\cos(0) = -\frac{4}{3} \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{6}$$

إذاً معادلة الاهتزاز الحر هي:

$$x(t)=\frac{2}{3}\cos(8t)-\frac{1}{6}\sin(8t) \qquad (6.5)$$

الآن التردد هو : $f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{8}{2\pi}=\frac{4}{\pi}$ **، وزمن الدورة الكاملة هو:** $T=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$ **ثانية**

رسم معادلة الاهتزاز الحر: لرسم معادلة الاهتزاز الحر (6.2):

$$x(t)=c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t)$$

نفرض أنّ المعادلة (6.2) تكافىء:

$$x(t)=A\sin(\omega t+\phi) \qquad (6.6)$$

حيث إنّ A **ثابت يسمى "سَعة" (Amplitude) الاهتزاز الحر و** ϕ **ثابت أيضاً يسمى "زاوية الطور" (Phase angle) المطلوب هو إيجادهما. وبالتبسيط نحصل على:**

$$x(t)=A\sin(\omega t)\cos\phi+A\cos(\omega t)\sin\phi .$$

وباجراء المقارنة بين المعادلة الأخيرة والمعادلة (6.2) نستنتج أنّ:

$$c_1=A\sin\phi,\quad c_2=A\cos\phi \qquad (6.7)$$

ومنها نحصل على:

$$\phi=\tan^{-1}(\frac{c_1}{c_2}) \quad \text{و} \quad A=\sqrt{c_1{}^2+c_2{}^2} \qquad (6.8)$$

من جانب آخر، دعنا نناقش الزمن اللازم كي يمر فيه الجسم عبر خط الاتزان. بالطبع يمر الجسم عبر خط الاتزان متزايداً او متناقصاً عندما يكون: $x(t)=0$ **، وحسب المعادلة (6.6) يكون:**

$$x(t)=A\sin(\omega t+\phi)=0$$

أي أنّ: $\sin(\omega t+\phi)=0$ **ومنها نحصل على:**

$$(\omega t_n+\phi)=0+\mathrm{n}\pi,\quad \mathrm{n}=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

لقد أضفنا $n\pi$ **بسبب دورية دالة الجيب، عندئذٍ يمر الجسم عبر خط الاتزان عندما:**

$$t_n=\frac{\mathrm{n}\pi-\phi}{\omega},\quad \mathrm{n}=0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad (6.9)$$

كذلك يصل الجسم نهايتيه العظمى والصغرى عندما: $x'(t)=0$ **، وباشتقاق المعادلة (6.6)، نحصل على:**

$$x'(t)=A\omega\cos(\omega t+\phi)=0$$

أي أنّ: $\cos(\omega t+\phi)=0$ **، ومنها نحصل على:**

$$(\omega t_n^{\,*} + \phi) = 0 + (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

لقد أضفنا $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ بسبب دورية دالة جيب التمام ، عندئذٍ يصل الجسم نهايتيه العظمى والصغرى عندما:

$$t_n^{\,*} = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2} - \phi}{\omega}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (6.10)$$

على سبيل المثال، لنعد الى المثال (3)، نلاحظ أنّ:

$$A = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (-\frac{1}{6})^2} = \frac{\sqrt{17}}{6} \approx 0.69$$

أي أنّ سعة الاهتزاز الحر هي : $A \approx 0.69$ ، وأنّ زاوية الطور هي:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{-1}{6}}\right) = \tan^{-1}(-4) = -1.326$$

بما أنّ : $c_1 > 0$ و $c_2 < 0$، فعليه من المعادلة (6.7) يكون $\sin\phi > 0, \quad \cos\phi < 0$

أي أنّ الزاوية ϕ تقع في الربع الثاني. في حين أنّ $\phi = -1.326$ في الربع الرابع، عليه نظيف π الى الزاوية ϕ كي تصبح في الربع الثاني. أي أن:

$$\phi = -1.326 + \pi = 1.816$$

من المعادلة (6.6) نجد أنًّ معادلة الاهتزاز الحر هي:

$$x(t) = \frac{\sqrt{17}}{6}\sin(8t + 1.816)$$

عند رسم معادلة الاهتزاز الحر نلاحظ أنّ احداثيات نقطة البدء هي $(0, \frac{2}{3})$ لأنّ $x(0) = \frac{2}{3}$ ، واتجاه الحركة عند البدء هو نحو الأعلى لأنّ $x'(0) = \frac{-4}{3}$ ، أي أنّ المنحني الذي يمثل رسم معادلة الاهتزازمتناقص لأنّ المشتقة سالبة (أي الميل سالب). من جانب آخر يمر الجسم عبر خط الاتزان حسب المعادلة (6.9) عندما:

$$t_n = \frac{n\pi - 1.816}{8}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

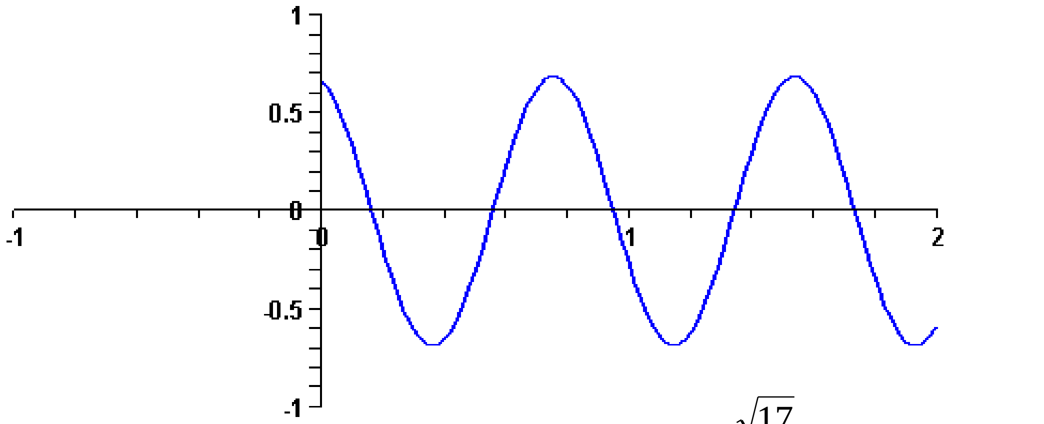
أي أنّ: $t_1 = \dfrac{\pi - 1.816}{8} = 0.166$ و $t_2 = \dfrac{2\pi - 1.816}{8} = 0.558$ ، .... الخ. لاحظ أنه لم نعوض بقيمة $n=0$ ، لأنّه تكون t_0 سالبة وهذا غير مقبول.

الآن يصل الجسم نهايتيه العظمى والصغرى حسب المعادلة (6.10) عندما:

$$t_n^{*} = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2} - 1.816}{8}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

أي أنّ: $t_1^{*} = \dfrac{3\frac{\pi}{2} - 1.816}{8} = 0.362$ و $t_2^{*} = \dfrac{5\frac{\pi}{2} - 1.816}{8} = 0.754$ و... الخ.

هنا أيضاً لم نعوض بقيمة $n=0$، لأنّه تكون t_0^{*} سالبة وهذا غير مقبول. كما في الشكل (6.3):



الشكل (6.3)

الآن نتناول مثالاً نستخدم فيه نظام الوحدات العالمي، ونجري مقارنة مع المثال (3) الذي استخدمنا فيه النظام البريطاني:

المثال (4): علق جسم يزن 89 نيوتن في النهاية الحرة للنابض الحلزوني الذي طوله 2 متران فأصبح طوله *2.1* متر ثم استقر الجسم المعلق. سحب الجسم بمقدار *0.15* متر تحت خط الاتزان واطلق من السكون (بسرعة صفر). جد معادلة الاهتزاز الحر ، ثم ارسم معادلة الاهتزاز الحر .

الحل: لنبدء بتحديد المعطيات: (نيوتن) $W = 89$ و (متر) $s = 2 - 2.1 = 0.1$ و (متر) $x(0) = 0.15$ ، و (متر/ثا) $x'(0) = 0$. ومنها نحصل على: $\omega^2 = \dfrac{890}{89/9.8} = 98$

و (كغم/ثا) $k=\frac{W}{s}=\frac{89}{0.1}=890$ ، و (كغم) $m=\frac{W}{g}=\frac{89}{9.8}=9.082$.

أي أنّ المعادلة التفاضلية التي تمثل الاهتزاز الحر، حسب المعادلة (6.1)، هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+98x=0 \quad , \quad x(0)=0.15, \quad x'(0)=0$$

وأن المعادلة الجبرية التي تقابل المعادلة التفاضلية هي: $r^2+98=0$ والجذران عقديان احدهما مرافق للآخر هما : $r_{1,2}=\pm 9.899i$ وأنّ حلها حسب المعادلة (6.2) هو:

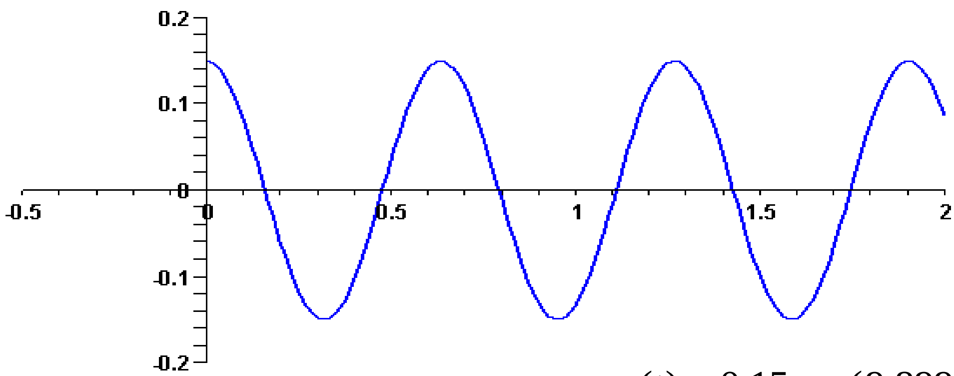
$$x(t)=c_1\cos(9.899\,t)+c_2\sin(9.889\,t)$$

نعوض بالشروط الابتدائية بعد الأشتقاق فنحصل على: $c_1=0.15$ و $c_2=0$.

أي أن معادلة الاهتزاز الحر هي:

$$x(t)=0.15\cos(9.899\,t)$$

كما موضح في الشكل (6.4):



$x(t)=0.15\cos(9.899\,t)$

الشكل (6.4)

المثال (5): علق جسم كتلته 1 سلج في النهاية الحرة للنابض الحلزوني الذي ثابته يساوي 9 رطل/قدم ثم استقر الجسم المعلق. دفع الجسم بمقدار 1 قدم باتجاه الأعلى واطلق بسرعة مقدارها $\sqrt{3}$ قدم/ثا باتجاه الأعلى. جد معادلة الاهتزاز الحر؟ ثم احسب الزمن اللازم كي يمر الجسم من خط الاتزان أول مرة، و سرعته عند تلك اللحظة.

الحل: لنبدأ بتحديد المعطيات:

$m=1$ و $k=9$ ، $x(0)=-1$ و $x'(0)=-\sqrt{3}$ قدم، ومنها نحصل على: $\omega^2=\frac{k}{m}=9$.

أي أنّ المعادلة التفاضلية التي تمثل الاهتزاز، حسب المعادلة (6.1)، هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=0$$

وأنّ حلها حسب المعادلة (6.2) يمثل معادلة الاهتزاز الحر:

$$x(t)=c_1\cos(3t)+c_2\sin(3t)$$

لإيجاد قيمة c_1 و c_2 ، نعوض في الشروط الابتدائية، فنحصل على:

$$x(0)=c_1\cos(0)+c_2\sin(0)=-1 \Rightarrow c_1=-1$$

الآن نشتق، فنحصل على:

$$x'(t)=-3c_1\sin(3t)+3c_2\cos(3t)$$

وبالتعويض بالشرط الابتدائي: $x'(0)=-\sqrt{3}$ ، نحصل على:

$$x'(0)=-3c_1\sin(0)+3c_2\cos(0)=-\sqrt{3} \Rightarrow c_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

إذاً معادلة الاهتزاز الحر هي:

$$x(t)=-\cos(3t)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(3t)$$

التي تكافيء: $x(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(3t+\frac{4\pi}{3})$ (تحقق من ذلك).

يمر الجسم بخط الاتزان عندما $x(t)=0$ ، و حسب المعادلة (6.9) يكون :

$$t_n=\frac{(n-4/3)\pi}{3},\quad n=1,\ 2,\ 3,\Lambda$$

ومنها نحصل على: $t_1=\frac{-\pi}{9}$ وهذه قيمة سالبة (تهمل). عليه نعوض بقيمة $n=2$ ، فنحصل على الزمن اللازم كي يمر الجسم من خط الاتزان وهو: $t=\frac{2\pi}{9}$.

نشتق معادلة الاهتزاز فنحصل على السرعة عند تلك اللحظة:

$$x'(t)=2\sqrt{3}\cos(3t+\frac{4\pi}{3})$$

وبالتعويض عن $t=\frac{2\pi}{9}$ نحصل على:

$$x'(\frac{2\pi}{9})=2\sqrt{3}\cos(\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})=2\sqrt{3}$$

إذاً السرعة هي $(2\sqrt{3})$ قدم/ثا وهي موجبة لأن الجسم عند تلك اللحظة يتجه نحو الأسفل (تحت خط الاتزان).

لاحظنا أنّ معادلة الاهتزاز الحر تمت بمعزل عن أي احتكاك أو قوة إخماد أو إعاقة، لقد تمت بظروف مثالية (نموذج رياضي). الآن سنضيف الى المسألة السابقة وجود قوة إخماد.

6.2 الاهتزاز الحر المخمد (Free damped vibration)

لنفرض أنّ الاهتزاز الحر الذي تناولناه في البند الأول يحصل بوسط فيه قوة إخماد؛ مثلاً الاهتزاز يحدث داخل برميل فيه سائل لزج يسبب إخماد لحركة الاهتزاز، أو مقاومة هواء تؤثر سلباً في الاهتزاز وتحاول اخماده، أو قوة احتكاك. بالطبع هذه القوة تتصف بما يأتي:

- انها سالبة كون اتجاهها نحو الأعلى، أي عكس الأتجاه الموجب،
- تتناسب تبع سرعة الاهتزاز $\frac{dx}{dt}$ ، أي كلما كانت سرعة الاهتزاز عالية فإنّ الوسط المحيط يحتاج قوة إخماد أكبر للحصول على حالة الاتزان.

عليه فحسب قانون نيوتن الثاني، فإنّ المعادلة التفاضلية التي تمثل الاهتزاز الحر المخمد هي:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}$$

حيث إنّ β هي موجبة تمثل معامل الاخماد، والاشارة السالبة أمامها لأنّ اتجاه قوة الإخماد سالب كما بينا سابقاً، بالقسمة على m والتبسيط، نحصل على:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt}$$

ومنها نحصل على:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \qquad (6.11)$$

حيث إنّ: $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ و $\omega^2 = \frac{k}{m}$. الثابت λ يسمى معامل الإخماد والثابت ω هو التردد الزاوي الطبيعي (كما بينا ذلك في البند 6.1)، والمعادلة (6.11) تسمى معادلة الاهتزاز الحر المخمد التفاضلية.

المعادلة (6.11) هي من الرتبة الثانية خطية متجانسة يمكن حلها بعد حساب جذور المعادلة الجبرية التي تقابلها، كما يأتي:

$$r=\frac{-2\lambda\pm\sqrt{4\lambda^2-4\omega^2}}{2}=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\omega^2} \qquad (6.12)$$

عندئذٍ يكون لدينا ثلاث حالات بالاعتماد على المقدار $(\lambda^2-\omega^2)$ موجب أم سالب أم صفر.

الحالة الأولى: إذا كان $\lambda^2-\omega^2>0$: الاخماد المفرط (Overdamped motion)

أي أنّ $\lambda>\omega$: في هذه الحالة يكون معامل الاخماد أعلى من التردد الزاوي الطبيعي للاهتزاز وجذرا المعادلة (6.12) يكونان حقيقيين مختلفين، وحل المعادلة التفاضلية (6.11)، يكون:

$$x(t)=c_1e^{(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega^2})t}+c_2e^{(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega^2})t} \qquad (6.13)$$

في الحالة الأولى التي فيها الاخماد مفرط نلاحظ أنه لا وجود للاهتزاز بسبب تأثير الاخماد المفرط عليه حيث أنّ حركة الاهتزاز تخمد ويصل الجسم الى وضع الاتزان ويستقر بجوار خط الاتزان. كما سنلاحظ ذلك في المثال الآتي:

المثال (1): علق جسم كتلته 1 سلج في النهاية الحرة للنابض الحلزوني الذي ثابته يساوي 4 رطل/قدم ثم استقر الجسم المعلق. سحب الجسم بمقدار 1 قدم باتجاه الأسفل واطلق بسرعة مقدارها 1 قدم/ثا باتجاه الأسفل أيضاً. جد معادلة الاهتزاز الحر المخمد إذا علمت أن الاهتزاز يحدث وسط سائل لزج مقاومته تساوي خمسة أضعاف السرعة اللحظية للاهتزاز.

الحل: لنبدأ بتحديد المعطيات: $m=1$ و $k=4$ و $\beta=5$ و $x(0)=1$ ، و $x'(0)=1$ ،

ومنها نحصل على: $\omega^2=\frac{k}{m}=4$ و $2\lambda=5$.

نلاحظ أنّ $\omega=2$ و $\lambda=2.5$ ، أي معامل الإخماد λ أكبر من التردد الزاوي الطبيعي ω ؛ عليه فإنّ الاهتزاز من نوع اهتزاز حر مخمد فيه الاخماد مفرط . أي أنّ المعادلة التفاضلية التي تمثل الاهتزاز، حسب المعادلة (6.11)، هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+4x=0 \quad , \quad x(0)=1, \quad x'(0)=1$$

وأنّ حلها حسب المعادلة (6.13) هو:

$$x(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-4t}$$

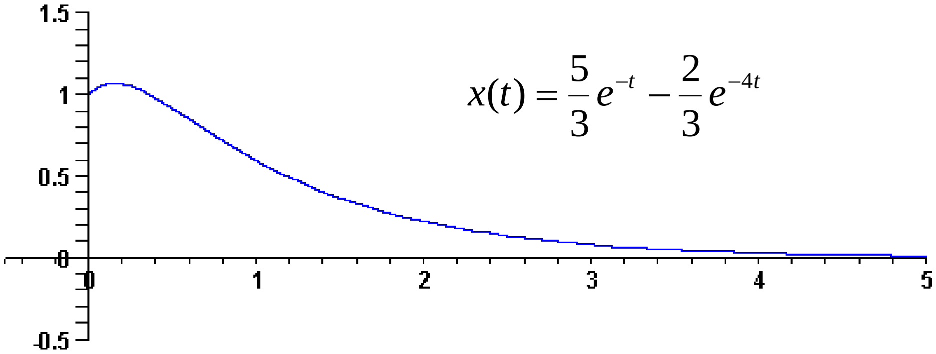
وبالتعويض بالشرط الابتدائي: $x(0)=1$ ، نحصل على: $c_1+c_2=1$ ، وباشتقاق الحل نحصل على:

$$x'(t)=-c_1e^{-t}-4c_2e^{-4t}$$

وبالتعويض بالشرط: $x'(0)=1$ ، نحصل على: $c_1+4c_2=-1$. وبحل المعادلتين الآنيتين نحصل على: $c_1=\frac{5}{3}$ و $c_2=\frac{-2}{3}$. أي أن الحل:

$$x(t)=\frac{5}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-4t}$$

يمكن تمثيل حركة الاهتزاز الحر المخمد في المثال السابق بمنحنى ينطلق من النقطة التي احداثياتها $(0,\ 1)$ باتجاه الأسفل ثم يستقر عند خط الاتزان، كما هو موضح في الشكل (6.5):



الشكل (6.5)

الحالة الثانية: إذا كان $\lambda^2-\omega^2=0$: الاخماد القلق (Critically damped motion)

أي أنّ $\lambda=\omega$: في هذه الحالة يكون معامل الاخماد يساوي التردد الزاوي الطبيعي للاهتزاز، وجذرا المعادلة (6.12) يكونان حقيقيان متساويين $r_1=r_2=-\lambda$ ، وحل المعادلة التفاضلية (6.11)، يكون:

$$x(t)=c_1e^{-\lambda t}+c_2t\,e^{-\lambda t}\ . \qquad (6.14)$$

في هذه الحالة التي فيها معامل الاخماد يساوي التردد الزاوي الطبيعي للاهتزاز، نلاحظ أنّ الاهتزازالمخمد قلق، فأية زيادة بسيطة على معامل الاخماد تصبح معادلة إهتزاز، فيه إخماد مفرط (الحالة الأولى)؛ أو أية زيادة على التردد الزاوي الطبيعي تصبح معادلة إهتزاز، فيه إخماد واطىء (الحالة الثالثة). عليه تكون حركة الاهتزاز بجوار خط الاتزان. كما سنلاحظ في المثال الآتي:

المثال (2): عُلقَ جسم يزن 8 أرطال في النهاية الحرة للنابض الحلزوني فسبب زيادة في طول النابض مقدارها قدمان ثم استقر الجسم المعلق. إذا كان الاهتزاز يحدث وسط سائل لزج مقاومته تساوي ضعف السرعة اللحظية للاهتزاز، فجد معادلة الاهتزاز الحر المخمد إذا علمت أنّ الجسم اطلق بسرعة مقدارها 3 قدم/ثا باتجاه الأعلى من عند خط الاتزان.

الحل: لنبدأ بتحديد المعطيات:

$W=8$ و $s=2$ و $\beta=2$ و $x(0)=0$ ، و $x'(0)=-3$ ، **ومنهـــا نحصـــل علـــى:**

$m=\frac{W}{g}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ و $k=\frac{W}{s}=\frac{8}{2}=4$ $\quad \omega^2=\frac{k}{m}=16$ و $2\lambda=8$ **.**

نلاحظ أنّ $\omega=\lambda=4$ ، **أي معامل الاخماد يساوي التردد الزاوي الطبيعي ؛ عليه فإنّ الاهتزاز من نوع اهتزاز مخمد حر فيه الاخماد قلق .**

أي أنّ المعادلة التفاضلية التي تمثل الاهتزاز، حسب المعادلة (6.11)، هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+8\frac{dx}{dt}+16x=0 \quad , \quad x(0)=0, \quad x'(0)=-3$$

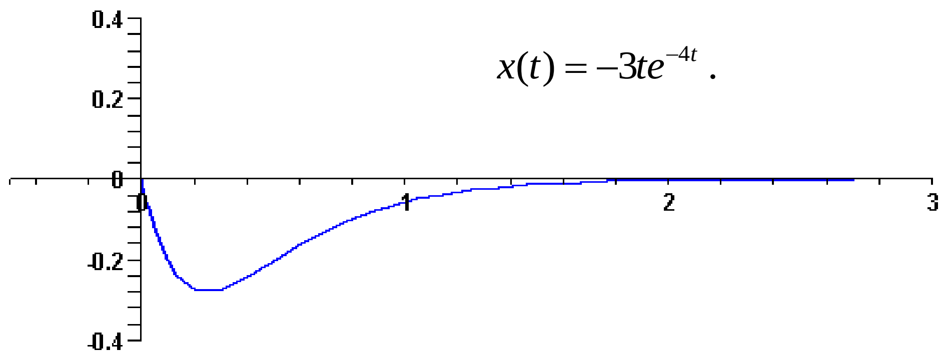
وأنّ حلها حسب المعادلة (6.14) هو: $x(t)=c_1e^{-4t}+c_2te^{-4t}$.

وبالتعويض بالشرط الابتدائي: $x(0)=1$ ، **نحصل على:** $c_1+c_2=1$ ، **وباشتقاق الحل نحصل على:** $x'(t)=-c_1e^{-t}-4c_2e^{-4t}$.

وبالتعويض بالشروط الابتدائية نحصل على: $c_1=0$ و $c_2=-3$ **. أي أن الحل:**

$$x(t)=-3te^{-4t}$$

يمكن تمثيل حركة الاهتزاز الحر المخمد في المثال السابق بمنحنى ينطلق من النقطة التي احداثياتها $(0,0)$ **وباتجاه الأعلى ثم يعود بعد الوصول الى نهايته العظمى ويستقر بجوار خط الاتزان، كما هو موضح في الشكل (6.6):**



الشكل (6.6)

الحالة الثالثة: إذا كان $\lambda^2-\omega^2<0$ **: الاخماد الواطيء (Underdamped motion)**

أي أنّ $\lambda<\omega$ **: في هذه الحالة يكون معامل الاخماد** λ **أقل من التردد الزاوي الطبيعي** ω **وجذرا المعادلة (6.12) يكونان عقديين أحدهما مرافق للآخر، وحل المعادلة التفاضلية (6.11)، يكون:**

$$x(t)=c_1e^{(-\lambda+i\sqrt{\omega^2-\lambda^2})\,t}+c_2e^{(-\lambda-i\sqrt{\omega^2-\lambda^2})\,t}$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة السابقة لتصبح أكثر ملاءمة في التطبيقات كما فعلنا ذلك في الفصل الخامس البند (5.2)، كما يأتي:

$$x(t)=e^{-\lambda\,t}\left(c_1e^{i\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t}+c_2e^{-i\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t}\right)$$

أي أن حل المعادلة التفاضلية (6.11) يصبح:

$$x(t)=e^{-\lambda t}\left(c_1\cos(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\;t)+c_2\sin(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\;t)\right) \qquad (6.15)$$

في هذه الحالة التي فيها الاخماد واطيء نلاحظ أنّ الاهتزاز الحر حاصل بالرغم من وجود قوة إخماد ويتناقص الاهتزاز تدريجياً بجوار خط الاتزان. كما سنلاحظ في المثال الآتي:

المثال (3): علق جسم يزن 16 رطلاً في النهاية الحرة للنابض الحلزوني الذي طوله 5 أقدام فأصبح طوله *8.2* قدم ثم استقر الجسم المعلق. دفع الجسم بمقدار *2* قدمين فوق خط الاتزان واطلق بحرية (بدون سرعة). جد معادلة الاهتزاز الحر المخمد إذا علمت أن الاهتزاز يحدث وسط سائل لزج مقاومته تساوي السرعة اللحظية للاهتزاز، ثم ارسم معادلة الاهتزاز الحر المخمد.

الحل: لنبدأ بتحديد المعطيات: $W=16$ و $s=8.2-5=3.2$ و $\beta=1$ و $x(0)=-2$، و $x'(0)=0$ ، **ومنهـا نحصـل علـى:** $k=\dfrac{W}{s}=\dfrac{16}{3.2}=5$ و $m=\dfrac{W}{g}=\dfrac{16}{32}=\dfrac{1}{2}$

$\omega^2=5/(\dfrac{1}{2})=10$ و $\lambda=1$.

نلاحظ أنّ $\omega=\sqrt{10}$ و $\lambda=1$ ، **أي التردد الزاوي الطبيعي أكبر من معامل الاخماد؛ عليه فإنّ الاهتزاز من نوع اهتزاز حر مخمد فيه الاخماد واطيء .**

أي أنّ المعادلة التفاضلية التي تمثل الاهتزاز، حسب المعادلة (6.11)، هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+10x=0\quad,\quad x(0)=-2,\quad x'(0)=0$$

وأن المعادلة الجبرية التي تقابل المعادلة التفاضلية هي: $r^2+2r+10=0$

والجذران عقديان أحدهما مرافق للآخر هما : $r_{1,2}=-1\pm 3i$

وأنّ حلها حسب المعادلة (6.15) هو:

$$x(t)=e^{-t}\left(c_1\cos 3t+c_2\sin 3t\right)$$

نعوض بالشروط الابتدائية بعد الاشتقاق فنحصل على: $c_1=-2$ و $c_2=-\dfrac{2}{3}$.

أي أن الحل:

$$x(t)=e^{-t}\left(-2\cos 3t-\frac{2}{3}\sin 3t\right)$$

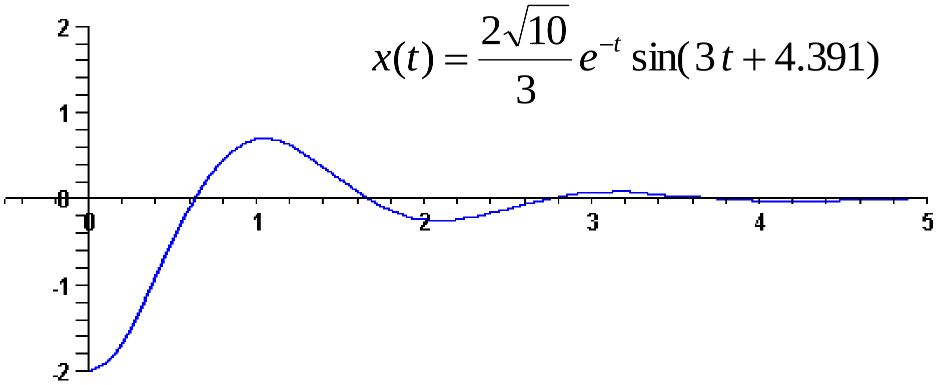
نلاحظ أنّ كلاً من c_1 و c_2 سالب، هذا يعني أن الزاوية ϕ تقع في الربع الثالث. دعنا نحسبها:

باستخدام المعادلة (6.10)، نحصل على سعة الاهتزاز الحر المخمد وزاوية الطور:

$A=\sqrt{4+\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$ و $\phi=\tan^{-1}\left(-2/\dfrac{-2}{3}\right)=\tan^{-1}3=1.249$ وهذه في الربع الأول. وبما أنّ الزاوية ϕ تقع في الربع الثالث، عليه فإنّ : $\phi=1.249+\pi=4.391$. وإنّ معادلة الاهتزاز الحر المخمد حسب المعادلة (6.6) هي:

$$x(t)=\frac{2\sqrt{10}}{3}e^{-t}\sin(3t+4.391) \tag{6.16}$$

يمكن تمثيل حركة الاهتزاز الحر المخمد في المثال السابق بمنحنى ينطلق من النقطة التي احداثياتها $(0,-2)$ وعندها يكون الاهتزاز في نهايته العظمى او الصغرى لأنّ المشتقة عندها صفر وهذا يعتمد على المشتقة الثانية أو من خلال الرسم، فاذا كانت المشتقة الثانية عند تلك النقطة موجبة فإنّ الاهتزاز في نهايته الصغرى، واذا كانت المشتقة الثانية عند تلك النقطة سالبة فإنّ الاهتزاز في نهايته العظمى. إنّ اقصى سعة للاهتزاز هي $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$ ثم تأخذ بالتناقص التدريجي، كما هو موضح في الشكل (6.7):



الشكل (6.7)

المثال (4): علق جسم يزن 89 نيوتن في النهاية الحرة للنابض الحلزوني الذي طوله 2 متران فأصبح طوله *2.1* متر ثم استقر الجسم المعلق. سحب الجسم بمقدار *0.15* متر تحت خط الاتزان واطلق من السكون (بسرعة صفر). جد معادلة الاهتزاز الحر المخمد إذا علمت أن الاهتزاز يحدث وسط سائل لزج مقاومته تساوي 100 السرعة اللحظية للاهتزاز، ثم ارسم معادلة الاهتزاز الحر المخمد.

الحل: لنبدأ بتحديد المعطيات:

$W=89$ **و** $s=2-2.1=0.1$ **و** $\beta=100$ **و** $x(0)=0.15$ **،** **و** $x'(0)=0$ **، ومنهــــا نحصل على:**

$$m=\frac{W}{g}=\frac{89}{9.8}=9.082\,kg \quad \text{و} \quad k=\frac{W}{s}=\frac{89}{0.1}=890\,kg/\sec^2$$

$$2\lambda=100/(\frac{89}{9.8})=11.011 \quad \text{و} \quad \omega^2=890/(\frac{89}{9.8})=98$$

نلاحظ أنّ $\omega=9.899$ **و** $\lambda=5.506$ **، أي التردد الزاوي الطبيعي أكبر من معامل الاخماد؛ عليه فإنّ الاهتزاز من نوع اهتزاز حر مخمد فيه الاخماد واطىء .**

أي أنّ المعادلة التفاضلية التي تمثل الاهتزاز، حسب المعادلة (6.11)، هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+11.011\frac{dx}{dt}+98x=0 \quad , \quad x(0)=0.15, \quad x'(0)=0$$

وأن المعادلة الجبرية التي تقابل المعادلة التفاضلية هي: $r^2+11.011r+98=0$

والجذران عقديان احدهما مرافق للآخر هما : $r_{1,2}=-5.506\pm 8.227i$

وأنّ حلها حسب المعادلة (6.15) هو:

$$x(t)=e^{-5.506t}\left(c_1\cos(8.227\,t)+c_2\sin(8.227\,t)\right)$$

نعوض بالشروط الابتدائية بعد الاشتقاق فنحصل على: $c_1=0.15$ **و** $c_2=0.1$**.**

أي أن الحل:

$$x(t)=e^{-5.506t}\left(0.15\cos(8.227\,t)+0.1\sin(8.227\,t)\right)$$

نلاحظ أنّ كلاً من c_1 **و** c_2 **موجب، هذا يعني أن الزاوية** ϕ **تقع في الربع الأول. دعنا نحسبها: باستخدام المعادلة (6.10)، نحصل على سعة الاهتزاز الحر المخمد:**

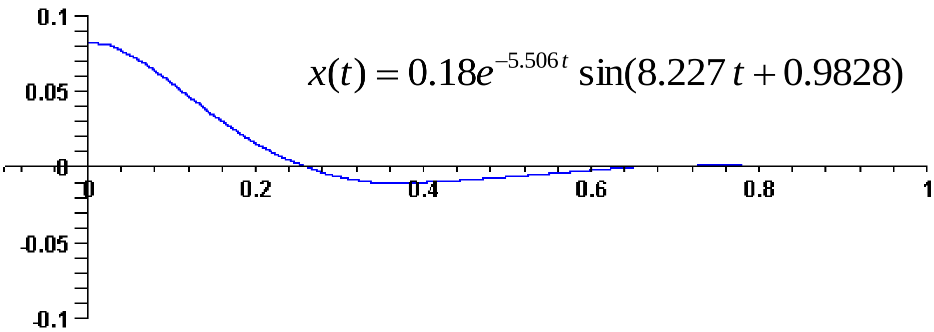
$$A=\sqrt{(0.15)^2+(0.1)^2}=\sqrt{0.0325}=0.18$$

و على زاوية الطور: $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0.15}{0.1}\right) = \tan^{-1}(1.5) = 0.9828$ ، وهذه في الربع الأول.

وأنّ معادلة الاهتزاز الحر المخمد حسب المعادلة (*6.6*) هي:

$$x(t) = 0.18e^{-5.506t}\sin(8.227\,t + 0.9828) \qquad \textbf{(6.17)}$$

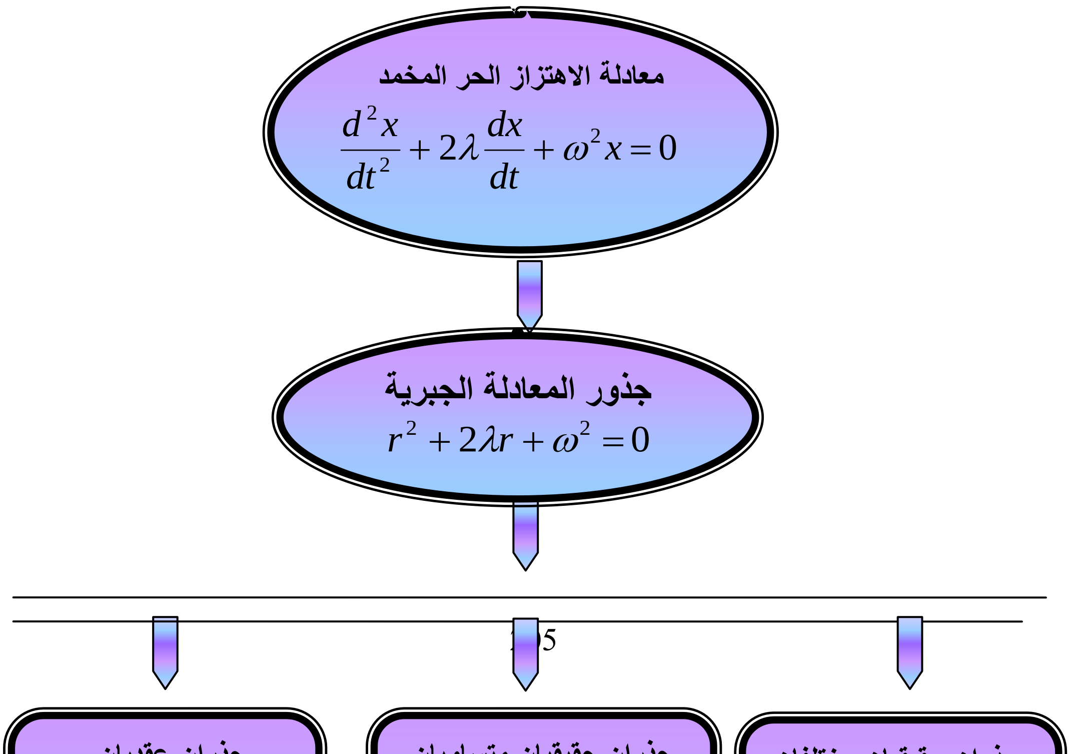
يمكن تمثيل حركة الاهتزاز الحر المخمد في المثال السابق بمنحنى ينطلق من النقطة التي احداثياتها $(0,\ 0.15)$ وعندها يكون الاهتزاز في نهايته العظمى او الصغرى لأنّ المشتقة عندها صفر وهذا يعتمد على المشتقة الثانية أو من خلال الرسم، فاذا كانت المشتقة الثانية عند تلك النقطة موجبة فإنّ الاهتزاز في نهايته الصغرى، واذا كانت المشتقة الثانية عند تلك النقطة سالبة فإنّ الاهتزاز في نهايته العظمى، كما هو موضح في الشكل (6.8):



الشكل (6.8)

يمكن تلخيص الحالات الثلاث السابقة كما في المخطط الانسيابي الآتي:

المخطط الانسيابي للحالات الثلاث لمعادلة الاهتزاز الحر المخمد



6.3 الاهتزاز القسري المخمد (Driven motion with damping)

لنفرض أنّ منظومة الاهتزاز الحر المخمد الذي ناقشناه في البند السابق يحصل تحت تأثيرقوة خارجية $f(t)$ تؤثر في اهتزاز النابض الحلزوني؛ هذه القوة الخارجية موجبة لأن اتجاهها نحو الاسفل، وتعتمد على الزمن t. عليه فإنّ المعادلة التفاضلية التي تمثل هذه الحركة:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-\beta\frac{dx}{dt}+f(t)$$

وبالقسمة على m واعادة تنظيم المعادلة، تصبح المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\frac{dx}{dt}+\omega^2x=F(t) \qquad (6.18)$$

حيث إنّ: $2\lambda=\frac{\beta}{m}$ و $\omega^2=\frac{k}{m}$، و $F(t)=\frac{f(t)}{m}$.

الثابت λ يسمى معامل الاخماد والثابت ω هو التردد الزاوي الطبيعي ، والدالة $F(t)$ هي القوة المسلطة على منظومة الاهتزاز وهي موجبة وتعتمد على الزمن t، وعندما تكون دورية (ترددية) ستنال اهتماماً كبيراً من قبلنا كما سنبين ذلك في البند القادم . والمعادلة (6.18) هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية غير متجانسة تسمى معادلة الاهتزاز القسري المخمد. لحل المعادلة التفاضلية (6.18) نستخدم إحدى الطرق التي تعلمناها في الفصل الخامس ؛ مثل طريقة المعاملات غير المحددة أو طريقة تبديل المَعْلَمَات، كما في المثال الآتي:

المثال (1): علق جسم يزن *6.4* رطل في النهاية الحرة للنابض الحلزوني الذي طوله 5 أقدام فأصبح طوله *8.2* قدم ثم استقر الجسم المعلق. سحب الجسم بمقدار $\frac{1}{2}$ قدم تحت خط الاتزان واطلق من

السكون (بسرعة صفر). جد معادلة الاهتزاز القسري المخمد إذا علمت أن الاهتزاز يحدث وسط سائل لزج مقاومته تساوي *1.2* **السرعة اللحظية للاهتزاز وان القوة المؤثرة هي** $f(t)=5\cos 4t$ **، ثم ارسم.**

الحل: لنبدأ بتحديد المعطيات:

$W=6.4$ و $s=8.2-5=3.2$ و $\beta=1.2$ و $x(0)=\dfrac{1}{2}$ ، و $x'(0)=0$ ، **ومنها نحصل على:**

$$k=\frac{W}{s}=\frac{6.4}{3.2}=2 \quad و \quad m=\frac{W}{g}=\frac{6.4}{32}=\frac{1}{5} \quad و \quad \omega^2=\frac{2}{1/5}=10 \quad و \quad \lambda=3$$

نلاحظ أنّ $\omega=\sqrt{10}$ **و** $\lambda=3$ **، أي التردد الزاوي الطبيعي اكبر من معامل الاخماد؛ عليه فإنّ الاهتزاز من نوع الاهتزازالقسري المخمد فيه الاخماد واطىء .**

أي أنّ المعادلة التفاضلية التي تمثل الاهتزاز، حسب المعادلة (6.18)، هي:

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2}+1.2\frac{dx}{dt}+2x=5\cos 4t$$

أي أنّ:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx}{dt}+10x=25\cos 4t \;,\quad x(0)=\frac{1}{2},\quad x'(0)=0 \qquad (6.19)$$

المعادلة التفاضلية (6.19) من الرتبة الثانية غير متجانسة معاملاتها ثوابت يمكن حلها بطريقة المعاملات غير المحددة. المعادلة الجبرية التي تقابل المعادلة التفاضلية المتجانسة هي:

$$r^2+6r+10=0$$

والجذران عقديان أحدهما مرافق للآخر هما : $r_{1,2}=-3\pm i$

وأنّ الدالة المكملة ، حسب المعادلة (6.15) هي:

$$x_c(t)=e^{-3t}\left(c_1\cos t+c_2\sin t\right)$$

الآن نفرض أنّ الحل الخاص للمعادلة (6.19) هو:

$$x_p(t)=A\cos 4t+B\sin 4t$$

نحسب المشتقة الأولى ثم المشتقة الثانية فنحصل على:

$$x_p'(t)=-4A\sin 4t+4B\cos 4t$$

$$x_p''(t) = -16A\cos 4t - 16B\sin 4t$$

وبالتعويض في المعادلة (6.19)، نجد:

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} + 6\frac{dx_p}{dt} + 10x_p = -16A\cos 4t - 16B\sin 4t +$$
$$6(-4A\sin 4t + 4B\cos 4t) + 10(A\cos 4t + B\sin 4t)$$
$$= (-6A + 24B)\cos 4t + (-24A - 6B)\sin 4t = 25\cos 4t$$

ومنها نحصل على: $-6A + 24B = 25$ **و** $-24A - 6B = 0$ **، وبحل المعادلتين الآنيتين، نجد:** $A = \frac{-25}{102}$ **و** $B = \frac{50}{51}$ **، عليه فإنّ الحل الخاص هو:**

$$x_p(t) = -\frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$$

عليه فإنّ الحل العام هو:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = e^{-3t}\left(c_1\cos t + c_2\sin t\right) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$$

الآن نعوض بالشروط الابتدائية بعد الأشتقاق فنحصل على: $c_1 = \frac{38}{51}$ **و** $c_2 = -\frac{86}{51}$**.**

أي أنّ معادلة الاهتزازالقسري المخمد هي:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\sin t\right) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$$

نلاحظ أنّ الحل يتكون من قسمين هما:

1. القسم الأول: $x_c(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\sin t\right)$

ويسمى "الحل المتضائل" أو "الحد المتضائل" (Transient term) ومن خصائصه أنه يقترب من الصفر عندما تكون t كبيرة جداً؛ أي: $x_c(t) \to 0$ **عندما** $t \to \infty$ **؛ ولهذا سمي بالحل المتضائل.**

2. القسم الثاني: $x_p(t) = -\frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$

ويسمى "الحل المستقر" أو "الحد المستقر" (Steady-state term) .

نستنتج من المثال السابق انه عندما تكون t كبيرة جداً، فإنّ الحل العام $x(t)$ يقترب من الحل الخاص $x_p(t)$. كما سنوضح ذلك بالرسم في المثال (2).

المثال (2): ناقش مسألة القيم الابتدائية:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+2x=4\cos t+2\sin t\ ,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=3 \qquad (6.20)$$

الحل: المعادلة التفاضلية (6.20) تمثل حركة الاهتزازالقسري المخمد ، وهي من الرتبة الثانية وغير متجانسة ومعاملاتها ثوابت ويمكن حلها بطريقة المعاملات غير المحددة.

المعادلة الجبرية التي تقابل المعادلة التفاضلية المتجانسة هي: $r^2+2r+2=0$

والجذران عقديان أحدهما مرافق للآخر هما : $r_{1,2}=-1\pm i$

وأنّ الدالة المكملة ، حسب المعادلة (6.15) هي: $x_c(t)=e^{-t}(c_1\cos t+c_2\sin t).$

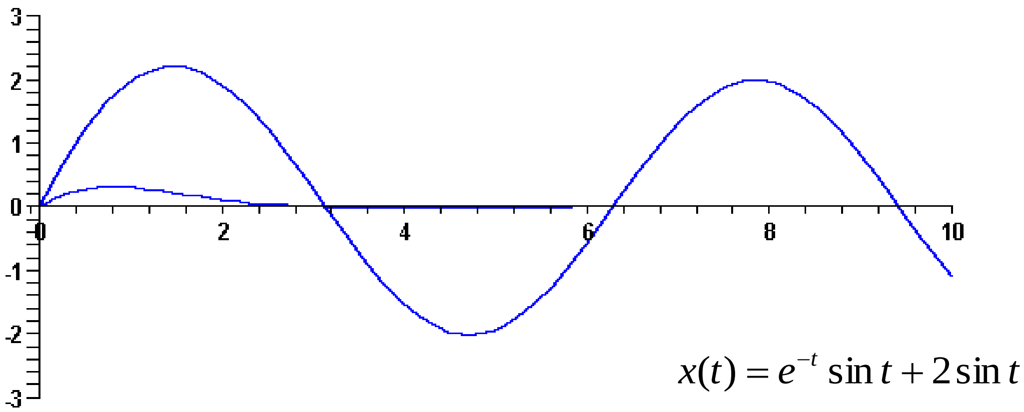
الآن نفرض أنّ الحل الخاص للمعادلة (6.20) هو: $x_p(t)=A\cos t+B\sin t$

وبالاسلوب المتبع في المثال (1) نفسه، يمكن الوصول الى (حاول ذلك):

$$x(t)=x_c(t)+x_p(t)=e^{-t}\sin t+2\sin t$$

الحل المتضائل هو : $x_c(t)=e^{-t}\sin t$ **، و الحل المستقر هو:** $x_p(t)=2\sin t$.

نستنتج من المثال السابق انه عندما تكون $t>2\pi$ **، فإنّ الحل العام** $x(t)$ **يقترب من الحل الخاص** $x_p(t)$ **. كما موضح في الشكل (6.9):**



الشكل (6.9)

6.4 الاهتزازات القسرية (Forced motions)

اختلف العلماء والقضاة في تحديد مسؤولية سقوط جسرعملاق في الولايات المتحدة الأمريكية، هو جسر تاكوما (Tacoma) في واشنطن.

من المسؤول: الرياضياتيون أم المهندسون؟

قبل البدء بوصف حالة سقوط جسر تاكوما، ندرج بعض المعلومات الخاصة بالجسر:

الموقع: تاكوما، واشنطن، امريكا	**تاريخ الانتهاء من بناء الجسر: 1940م**
الكلفة: *6.4* **ملايين دولار امريكي**	**طول الجسر:** *9392* **قدماً**
النوع: معلق (ثالث اكبر تعليق بالعالم)	**الغرض: عبور السيارات والمشاة والنقل**
مادة الصنع: حديد + خرسانة (كونكريت)	**طول المقطع:** *2800* **قدم**
المهندس : ليون ماوسيف.	

في تمام الساعة السابعة من صباح يوم 1940/11/7م بدأ الجسربالاهتزازالمطرد المنتظم مدة ثلاث ساعات نتيجة هبوب رياح مجاورة للجسر،أخذ خلالها أحد مقاطع الجسر بالاهتزاز (الارتفاع والانخفاض والالتواء) بشكل دوري منتظم حتى بلغ الارتفاع إلى حد ثلاثة أقدام عن مستواه المحدد، أنظر الشكل (6.10). وبعد الساعة العاشرة صباحاً بلغت سرعة الرياح 42 ميل/ساعة وعندئذ بدأ الجسر بالرّنين، وفي تمام الساعة العاشرة والنصف وخلال لحظة معينة وصلت إحدى نهايتي الجسر أقصى سعة للاهتزاز وبلغت ارتفاع 28 قدماً وبعد لحظة لاحقة وصلت تلك النهاية إلى انخفاض 28 قدماً ثم سقط الجسر في الماء . ولحسن الحظ كانت سيارة واحدة تروم العبور في تلك اللحظة بقيادة مراسل صحفي ومعه كلبه، وقد نجا السائق من الموت في حين أن الكلب قد لقي حتفه والسيارة تحطمت تماماً، علماً بان الجسر يعد من اكثر الجسور ازدحاماً بالعبور. ومن الطرائف التي رافقت ذلك الحدث هو أن معظم البنوك وشركات التأمين كانت تنشر في الصحف والمجلات المحلية والإعلانات أن تأمينها يقترن بالأمان الذي يتسم به جسر تاكوما!! كأفضل مثال، لثقة الناس به في ذلك الوقت. وبعد سقوط الجسر سارعت هذه المؤسسات إلى رفع نشراتها وإعلاناتها من محلها. كما أن حاكم الولاية التقى السكان بعد سقوط الجسر مباشرةً وألقى فيهم خطاباً حماسياً لرفع معنويات الجمهور وذكر في حديثه، متحدياً الرياضيات والهندسة وكلّ الظروف التي أدت إلى سقوط الجسر، انه سيعيد بناء الجسر بالطريقة نفسها التي شيد فيها الجسر الساقط. وفي اليوم التالي سارع أحد المهندسين من الذين اشرفوا على تنفيذ الجسر وإنجازه، بإرسال برقية إلى الحاكم يذكر فيها انه إذا أعيد بناء الجسر ثانيةً بالطريقة الأولى نفسها فسوف يسقط الجسر بالطريقة نفسها التي سقط فيها في المرة الأولى.

وفي عام 1850م انهار جسر معلق في فرنسا أثناء مرور فرقة من الجنود فوق الجسر بالخطوة العسكرية (السير المنتظم) وأدى ذلك الى وفاة 226 جندياً. وفي حادث مشابه، سقط جسر برايتن (انكلترا) في نهر ارويل نتيجة عبور كتيبة مشاة عسكرية بالسير المنتظم عليه ؛ كما ورد في جريدة

التايمز البريطانية في عددها الصادر في 15 نيسان عام 1831م . ولهذا السبب يفرض على الجنود السير بشكل غير منتظم (مخالفة للتعليمات) عند عبورهم الجسور، كي لا يكون هنالك أدنى احتمال لوقوع كارثة كسقوط الجسر.

لقد كان انهيار هذه الجسور بمثابة ناقوس خطر يدق في عالم الرياضيات والفيزياء والهندسة لفهم سبب الانهيار وتجنب حدوث مثل هذه الظواهر في المستقبل. يكمن السّر في فهم هذه الظواهر في موضوع ندرسه في المعادلات التفاضلية يعرف باسم الاهتزازات القسرية (بدون إخماد أو الإخماد ضعيف جداً).

لقد بينا في البند (6.1) أن كل جسم مهتز له تردد زاوي طبيعي ω ، وذكرنا في البند (6.3) حين اشتقاق المعادلة (6.18) أن القوى الخارجية $F(t)$ المؤثرة في المنظومة يمكن ان تكون دورية (مترددة) ولنفرض أن ترددها الزاوي هو γ . وعندما يتساوى التردد الزاوي للقوة الخارجية γ مع التردد الزاوي الطبيعي ω للجسم المعلق فإن السعة تأخذ نهايتها العظمى وتحصل الكارثة، وهذا ما يسمى بالرنين المطلق. أي أن الرنين المطلق يحدث عندما $\omega=\gamma$ ، كما سنبين ذلك عند اشتقاق معادلة الرنين المطلق لاحقاً.

من الطبيعي أن نتوقع في حالة الجسور المعلقة، أي التي يكون جزءٌ كبيرٌ منها في الهواء، أن تنشأ حزم هوائية دوّارة ذات قوة فائقة لا يمكن السيطرة عليها مجاورة للجسر و تسير بشكل دوري اعتماداً على شكل الجسر وأبعاده وعلى سرعة الهواء أو السائل الذي يحيط به، وبالنتيجة فإنّ الحزم الهوائية المتولدة على جانبي الجسر تولّد قوة دورية عمودية على اتجاه الحزم الهوائية تعتمد على شكل الجسر، وهذه بدورها تولد اهتزازات قسرية. وأنّ الخطورة تحصل عندما يكون التردد الزاوي الطبيعي للجسرالمعلق قريباً جداً من التردد الزاوي للقوة المتولدة نتيجة الحزم الهوائية المجاورة للجسر، وعندما يكونان متساويين فإنّ الكارثة ستحصل. وإذا عدنا الى قصة الجسور سيسهل فهم ما حصل في ضوء ما تم شرحه وتوضيحه. ففي حالة جسري فرنسا وبرايتن (انكلترا) تصادف أن تساوى التردد الزاوي للخطوة العسكرية للجنود مع التردد الزوي الطبيعي للمواد المكونة للجسر فأخذ الجسر يهتز بسعة عظمى بحيث تجاوزت المواد حدود مرونتها وانهار الجسر وحصلت الكارثة، ومنذ ذلك الحين منع سير الجنود فوق الجسور بالخطوة العسكرية. أما في حالة جسر تاكوما فقد تصادف أن هبت رياح دورية تساوى تردد هبوبها مع التردد الزاوي الطبيعي لمواد الجسر فاخذ الجسر يهتز بسعة عظمى بحيث تجاوزت المواد حدود مرونتها وانهار الجسر وحصلت الكارثة.

إن هذه الكوارث هي الوجه المعتم لظاهرة الرنين ولكن الوجه المضيء لهذه الظاهرة في حياتنا يبقى هو السائد، على سبيل المثال : الاذاعة والتلفزيون والتصوير بالرنين المغناطيسي وغيرها.

لذلك نخلص إلى القول، إن "الرياضيات" لم تكن مسؤولة عن سقوط جسر تاكوما وإنها بريئة من ذلك للحسابات والأمور المنطقية العلمية التي ذكرناها.

صور تمثل مراحل سقوط جسر تاكوما

الشكل (6.10)

لتفسير ما حدث لجسر تاكوما، تامل مسألتي القيم الابتدائية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \sin(\gamma t), \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 0, \qquad (6.21a)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos(\gamma t), \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 0, \qquad (6.21b)$$

حيث إنّ F_0 ثابت يمثل سعة القوة المؤثرة في الطرف الأيمن من المعادلة (6.18) التي تهتز بتردد $\frac{2\pi}{\gamma}$. سنتولى مناقشة المعادلة (6.21a) ونترك للطالب مناقشة المعادلة الأخرى.

تسمى كل من المعادلتين التفاضليتين (6.21a) و (6.21b) بمعادلة الاهتزازات القسرية التفاضلية (بدون اخماد)، وهي من الرتبة الثانية وغير متجانسة ومعاملاتها ثوابت و يمكن حلها بطريقة المعاملات غير المحددة. وإنّ الدالة المكملة ، حسب المعادلة (6.15) هي:

$$x_c(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

الآن نفرض أنّ الحل الخاص للمعادلة (6.21a) هو:

$$x_p(t) = A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t)$$

نحسب المشتقة الأولى ثم المشتقة الثانية فنحصل على:

$$x_p'(t) = -A\gamma \sin(\gamma t) + B\gamma \cos(\gamma t)$$

$$x_p''(t) = -A\gamma^2 \cos(\gamma t) - B\gamma^2 \sin(\gamma t)$$

وبالتعويض في المعادلة (6.21a)، نجد:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_p}{dt^2} + \omega^2 x_p &= -A\gamma^2 \cos(\gamma t) - B\gamma^2 \sin(\gamma t) \\ &\quad + \omega^2 \left(A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t)\right) \\ &= A(\omega^2 - \gamma^2)\cos(\gamma t) + B(\omega^2 - \gamma^2)\sin(\gamma t) \\ &= F_0 \sin(\lambda \mathrm{t}) \quad ,\end{aligned}$$

ومنها نحصل على:

$$B(\omega^2 - \gamma^2) = F_0 \quad \text{و} \quad A(\omega^2 - \gamma^2) = 0$$

أي أنّ:

$$B = \frac{F_0}{(\omega^2 - \gamma^2)}, \ \omega \neq \gamma \quad \text{و} \quad A = 0$$

عليه فإنّ الحل الخاص هو:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(\omega^2 - \gamma^2)} \sin(\gamma t)$$

عليه فإنّ الحل العام هو:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{F_0}{(\omega^2 - \gamma^2)} \sin(\gamma t)$$

الآن نعوض بالشروط الابتدائية بعد الاشتقاق فنحصل على:

$$c_2 = -\frac{\gamma F_0}{\omega(\omega^2-\gamma^2)} \quad \text{و} \quad c_1 = 0$$

أي أنّ معادلة الاهتزازات القسرية للمعادلة التفاضلية **(6.21a)** هي:

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}\left(-\gamma\sin\omega t + \omega\sin(\gamma t)\right)\ ,\ \gamma \neq \omega \qquad \textbf{(6.22}a\textbf{)}$$

أما بالنسبة للمعادلة التفاضلية **(6.21b)** فسيكون حلها (يستطيع الطالب إيجاده بالأسلوب أعلاه نفسه):

$$x(t) = \frac{F_0}{(\omega^2-\gamma^2)}\left(\cos(\gamma t) - \cos(\omega t)\right)\ ,\ \gamma \neq \omega \qquad \textbf{(6.22}b\textbf{)}$$

تمثل كل من المعادلتين السابقتين الإزاحة عند الزمن t و هي على شكل "ترددات تكرارية" **(Beats oscillations)** .

بالرغم من أنّ المعادلتين **(6.22a)** و **(6.22b)** غير معرفتين عندما $\gamma = \omega$ ، إلا أنّه يمكن ايجاد النهاية عندما $\gamma \to \omega$ باستخدام قاعدة لوبيتال **(L'Hopital rule)**. سنتولى مناقشة المعادلة **(6.22a)** ونترك للطالب مناقشة المعادلة الأخرى.

$$x(t) = \lim_{\gamma\to\omega}\left\{ \frac{F_0}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}\left(-\gamma\sin(\omega t) + \omega\sin(\gamma t)\right) \right\}$$

$$= F_0 \lim_{\gamma\to\omega} \frac{\frac{d}{d\gamma}\left(-\gamma\sin(\omega t) + \omega\sin(\gamma t)\right)}{\frac{d}{d\gamma}(\omega^3-\omega\gamma^2)}$$

$$= F_0 \lim_{\gamma\to\omega} \frac{\left(-\sin(\omega t) + \omega t\cos(\gamma t)\right)}{-2\omega\gamma}$$

$$= F_0 \frac{\left(-\sin(\omega t) + \omega t\cos(\omega t)\right)}{-2\omega^2}$$

إذاً:

$$x(t) = \frac{F_0}{2\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{F_0}{2\omega}t\ \cos(\omega t) \qquad \textbf{(6.23}a\textbf{)}$$

ملاحظة: يمكن إعادة حل المعادلة (6.21a) عندما $\omega = \gamma$ ، أي:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x = F_0 \sin(\omega t), \quad x(0)=0, \quad x'(0)=0$$

و الحصول على الحل (6.23a) باستخدام طريقة المعاملات غير المحددة بدلا من الغاية.

نلاحظ من خلال الرسم، انظر الشكل (6.11) كمثال على ذلك، أنّ الازاحة $x(t)$ تزداد عندما تـزداد t ، و $|x_n(t)| \to \infty$ عنـدما $(\mathrm{n}=1, 2, \ldots)$, $t_n=\frac{n\pi}{\omega}$. تسـمى هـذه الظـاهرة بـــ "الرنين المطلق" (Pure resonance) . أي في حالة حصول هذه الظاهرة كما حصل لجسر تاكوما فإنّ الإزاحة $x(t)$ تبدأ بالازدياد التدريجي المطرد بمرور الزمن حتى تحصل الكارثة كما في المثال الآتي:

المثـال (1): علـق جسم يزن 4.9 كيلـوغرام فـي النهايـة الحـرة لنـابض حلزونـي طولـه 3.55 متر فأصبح طولـه 6 أمتـار ثم استقر علـى خط الاتـزان. ثم إنطلق الجسم بـالاهتزاز من السكون (بدون سرعة) تحت تـأثير قوة دورية خارجية $f(t)=0.5\sin 2t$. جد معادلـة الاهتزاز إذا علمت ان الاهتزاز يحدث بدون مقاومة، ثم ارسم دالة الاهتزاز و بين نوع الحركة.

الحل: لنبدأ بتحديد المعطيات:

$W=4.9\ kg$ و $s=6-3.55=2.45$ و $x(0)=0$ و $x'(0)=0$ ، ومنهـــا نحصـــل على: $k=\frac{W}{s}=\frac{4.9}{2.45}=2$ و $m=\frac{W}{g}=\frac{4.9}{9.8}=\frac{1}{2}$.

أي أنّ المعادلة التفاضلية التي تمثل الاهتزاز، حسب المعادلة العامة بدون إخماد هي:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}+2x=0.5\sin 2t$$

و كما ترى فإنّها تتوافق مع المعادلـة (6.21a) وبتبسيطها وإضـافة الشروط الابتدائيـة نحصل على مسألة القيم الابتدائية:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=\sin 2t \ , \quad x(0)=0, \quad x'(0)=0 \qquad \textbf{(6.24)}$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة معاملاتها ثوابت ويمكن حلها بطريقة المعاملات غير المحددة. المعادلة الجبرية التي تقابل المعادلة التفاضلية المتجانسة هي: $r^2+4=0$ والجذران عقديان أحدهما مرافق للآخر هما : $r_{1,2}=\pm 2i$ وأنّ الدالة المكملة هي:

$$x_c(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$$

بما أن التردد الزاوي الطبيعي ω يساوي التردد الزاوي للقوة الخارجية γ فإنّ الحل الخاص للمعادلة بطريقة المعاملات غير المحددة يجب أن يكون بالصيغة:

$$x_p(t) = t(A\sin 2t + B\cos 2t)$$

لإيجاد قيم المعاملين $A,\ B$ نحسب المشتقة الأولى ثم المشتقة الثانية فنحصل على:

$$x_p'(t) = t(2A\cos 2t - 2B\sin 2t) + A\sin 2t + B\cos 2t$$

$$\begin{aligned} x_p''(t) &= t(-4A\sin 2t - 4B\cos 2t) + 2A\cos 2t - 2B\sin 2t \\ &\quad + 2A\cos 2t - 2B\sin 2t \end{aligned}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_p}{dt^2} + 4x_p &= t(-4A\sin 2t - 4B\cos 2t) + 2A\cos 2t - 2B\sin 2t \\ &\quad + 2A\cos 2t - 2B\sin 2t + t(4A\sin 2t + 4B\cos 2t) = \sin 2t \end{aligned}$$

أي أن $4A\cos 2t - 4B\sin 2t = \sin 2t$ ومنها نحصل على: $-4B = 1$ و $4A = 0$

، وعليه فإنّ الحل الخاص هو: $x_p(t) = -\frac{1}{4}t\cos 2t$ ، و بذلك يكون الحل العام :

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = c_1\sin\ 2t + c_2\ \sin\ 2t - \frac{1}{4}t\cos 2t$$

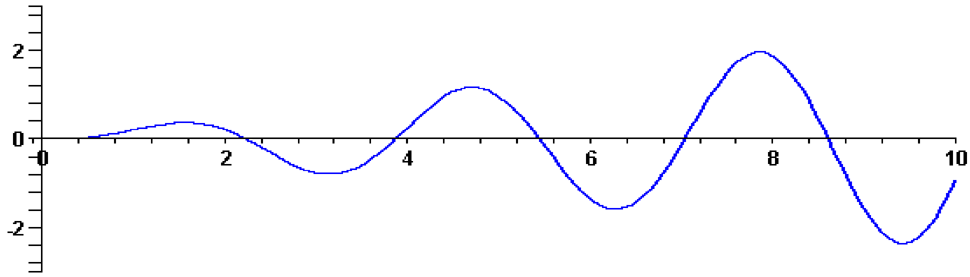
الآن نعوض بالشروط الابتدائية بعد الاشتقاق فنحصل على: $c_1 = 0$ و $c_2 = \frac{1}{8}$.

أي أنّ معادلة الاهتزاز القسري (بدون إخماد) هي:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = \frac{1}{8}\sin 2t - \frac{1}{4}t\cos 2t$$

و كما ترى فإنّها متوافقة مع الحالة العامة للرنين المطلق (المعادلة 6.23a) حيث $\omega = 2$ $F_0 = 1,$ وفيها تبدأ الازاحة $x(t)$ بالازدياد التدريجي المطرد بمرور الزمن كما في الشكل (6.11).

$$x(t) = \frac{1}{8}\sin 2t - \frac{1}{4}t\cos 2t$$



الشكل (6.11)

المثال (2): **لتكن مسألة القيم الابتدائية**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.5 \ \cos(0.8t) \ , \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

تمثل المعادلة التفاضلية لاهتزاز جسم علق في النهاية الحرة لنابض حلزوني. جد معادلة الاهتزاز و بين نوع الحركة.

الحل: نجد أولا الدالة المكملة (الحل العام للمعادلة المتجانسة): $x_c = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ ، **عليه تكون قيمة التردد الزاوي للقوة الخارجية** $\gamma = 0.8$ **والتردد الزاوي الطبيعي** $\omega = 1$ **. وبما أن الترددين مختلفان يكون الحل الخاص بالصيغة الآتية:** $x_p = A\cos 0.8t + B\sin 0.8t$ **. و بالتعويض في المعادلة التفاضلية و مقارنة المعاملات نحصل على:** $B = 0$ $, \ A = \frac{25}{18}$ ، **وبذلك يكون الحل العام:**

$$x(t) = x_c + x_p = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{25}{18}\cos 0.8t$$

و باستخدام الشروط الابتدائية للمسألة نحصل على قيمتي الثابتين c_1 **و** c_2 **ومنه حل المسألة:**

$$x(t) = \frac{25}{18}(\cos(0.8\,t) - \cos(t))$$

و كما ترى فإنّه متوافق مع الحالة العامة للتردد التكراري (المعادلة 6.22 b) حيث $F_0 = 0.5, \ \ \omega = 1, \ \ \gamma = 0.8$ **.**

و باستخدام العلاقة المثلثية

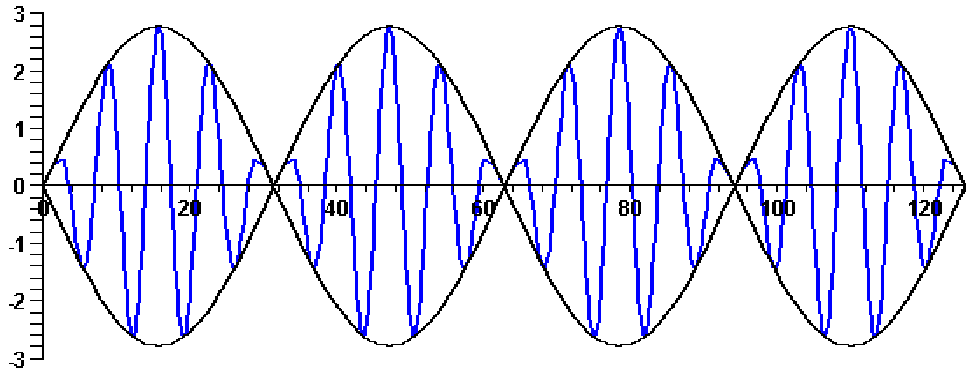
$$\cos A - \cos(B) = 2\sin(\frac{B-A}{2})\sin(\frac{B+A}{2})$$

نحصل على الحل بالصيغة

$$x(t) = \frac{25}{9}\sin(0.1t)\sin(0.9t)$$

و كما ترى في الشكل (6.12) فإنّ الأزاحة على شكل ترددات تكرارية يحدها من الأعلى والأسفل:

$x(t) = \pm\frac{25}{9}\sin 0.1t$.



$\uparrow$

$x(t) = \frac{25}{9}\sin 0.1t$

الشكل (6.12)

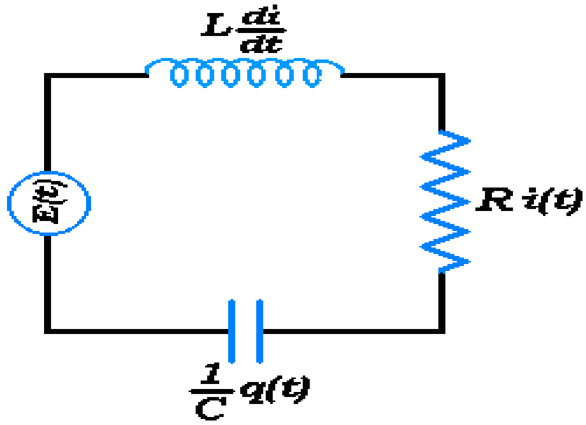
6.5 الدارات الكهربائية (Electric circuits)

تناولنا في البند (3.1) تطبيقات في الكهربائية على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى. سنتناول في هذا البند تطبيقات في الكهربائية على المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية، في هذه الحالة ستتألف الدارة الكهربائية من محاثة و مقاومة و متسعة، و القوة الدافعة الكهربائية.

لا داعي لاعادة القوانين والمعادلات التي اشتققناها سابقاً، ونبدأ من المعادلة التفاضلية:

$$E(t) = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q(t) \qquad (6.25)$$

المعادلة (6.25) تعني أنّ فرق الجهد عند طرفي القوة الدافعة الكهربائية في دارة كهربائية مغلقة يساوي مجموع فروق الجهد عند طرفي العناصر الاخرى المارة في الدارة، كما مبين في الشكل (6.13):



الشكل (6.13)

نلاحظ أنّ المعادلة (6.25) هي معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية يمكن حلها باحدى الطرائق التي تناولناها في الفصل الخامس: مثل طريقة المعاملات غير المحددة أو طريقة تبديل المَعْلَمَات، كما في المثالين الآتيين:

المثال (1): في دارة بسيطة من نوع (L-R-C) تتألف من مقاومة 10 أوم ومحاثة 0.25 **هنري، ومتسعة** 0.001 **فاراد، مربوطة على التوالي مع بطارية قوتها الدافعة الكهربائية صفر فولت. احسب كمية الشحنة** $q(t)$ **إذا علمت أنّ** $q(0)=q_0$ **والتيار الابتدائي هو صفر.**

الحل: من المعادلة (6.25) نحصل على المعادلة الخطية:

$$\frac{1}{4}\frac{d^2q}{dt^2}+10\frac{dq}{dt}+1000\,q=0$$

أي:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+40\frac{dq}{dt}+4000\,q=0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية متجانسة ومعاملاتها ثوابت. وأن المعادلة الجبرية التي تقابلها هي: $r^2+40r+4000=0$ **والجذران عقديان أحدهما مرافق للآخر هما :** $r_{1,2}=-20\pm 60i$ **وأنّ حلها حسب المعادلة (6.15) هو:**

$$q(t)=e^{-20t}\left(c_1\cos 60\,t+c_2\sin 60\,t\right)$$

نعوض بالشروط الابتدائية بعد الاشتقاق فنحصل على: $c_1=q_0$ **و** $c_2=\frac{q_0}{3}$.

أي أن الحل:

$$q(t)=q_0e^{-20t}\left(\cos 60\,t+\frac{1}{3}\sin 60\,t\right)$$

نلاحظ أنّ كلاً من c_1 و c_2 موجب، هذا يعني أن الزاوية ϕ تقع في الربع الأول. وبالطريقة نفسها التي استخدمناها في المثال (3) من البند (6.2) ، يمكن للطالب التحقق من أنّ المعادلة تكافىء:

$$q(t) = q_0 \frac{\sqrt{10}}{3} e^{-20t} \sin(60\,t + 1.249)$$

وهي المعادلة التي تمثل كمية الشحنة عند اي زمن t .

المثال (2): في دارة بسيطة من نوع (L-R-C) تتألف من مقاومة (10) أوم ومحاثة $\frac{5}{3}$ هنري، ومتسعة $\frac{1}{30}$ فاراد، مربوطة على التوالي مع بطارية قوتها الدافعة الكهربائية **300** فولت. احسب كمية الشحنة $q(t)$ والتيار $i(t)$ إذا علمت أنّ $q(0) = 0$ والتيار الابتدائي هو واحد.

الحل: من المعادلة (6.25) نحصل على المعادلة الخطية:

$$\frac{5}{3}\frac{d^2q}{dt^2} + 10\frac{dq}{dt} + 30q = 300$$

أي:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 6\frac{dq}{dt} + 18q = 180$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غيرمتجانسة ومعاملاتها ثوابت. وأن المعادلة الجبرية التي تقابل الجزء المتجانس هي: $r^2 + 6r + 18 = 0$ والجذران عقديان أحدهما مرافق للآخر هما : $r_{1,2} = -3 \pm 3i$ وأنّ حلها حسب المعادلة (6.15) هو:

$$q(t) = e^{-3t}\left(c_1 \cos 3\,t + c_2 \sin 3\,t\right)$$

نعوض بالشروط الابتدائية بعد الاشتقاق فنحصل على: $c_1 = 0$ و $c_2 = \frac{1}{3}$.

أي أن كمية الشحنة عند اي زمن t: $q(t) = \frac{1}{3} e^{-3t}\left(\sin 3\,t\right)$

والتيار هو: $i(t) = \frac{dq}{dt} = e^{-3t}\left(\cos 3\,t - \sin 3\,t\right)$.

المثال (3): احسب كمية الشحنة في حالة الاستقرار $q_p(t)$ والتيار $i_p(t)$ في دارة بسيطة من نوع (L-R-C) مربوطة على التوالي مع بطارية قوتها الدافعة الكهربائية $E(t) = E_0 \sin(\gamma\ t)$.

الحل: لايجاد الحل الخاص في حالة الاستقرار $q_p(t)$ للمعادلة التفاضلية:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=E_0\sin(\gamma\ \mathrm{t})$$

نستخدم طريقة المعاملات غير المحددة، بفرض أنّ:

$$q_p(t)=A\sin(\gamma\ \mathrm{t})+\mathrm{B}\cos(\gamma\ \mathrm{t})$$

نشتق مرتين ونعوض في المعادلة التفاضلية ونبسط فنحصل على الثابتين (تحقق من ذلك):

$$A=\frac{E_0(L\gamma-\frac{1}{C\gamma})}{-\gamma\left(L^2\gamma^2-\frac{2L}{C}+\frac{1}{C^2\gamma^2}+R^2\right)}$$

$$B=\frac{E_0R}{-\gamma\left(L^2\gamma^2-\frac{2L}{C}+\frac{1}{C^2\gamma^2}+R^2\right)}$$

سنكتب المعادلتين السابقتين بصيغة اسهل من خلال فرض:

$X=L\gamma-\dfrac{1}{C\gamma}$ ، ومنها نحصل على: $X^2=L^2\gamma^2-\dfrac{2L}{C}+\dfrac{1}{C^2\gamma^2}$ ،

$Z=\sqrt{X^2+R^2}$ ، ومنها نحصل على: $Z^2=L^2\gamma^2-\dfrac{2L}{C}+\dfrac{1}{C^2\gamma^2}+R^2$.

ومنها نجد أنّ:

$A=\dfrac{E_0X}{(-\gamma\ Z^2)}$ و $B=\dfrac{E_0R}{(-\gamma\ Z^2)}$ ، وعليه فإنّ كمية الشحنة في حالة الاستقرار $q_p(t)$:

$$q_p(t)=-\frac{E_0X}{\gamma\ Z^2}\sin(\gamma\ \mathrm{t})-\frac{E_0R}{\gamma\ Z^2}\cos(\gamma\ \mathrm{t})$$

والتيار في حالة الاستقرار $i_p(t)=\dfrac{dq_p}{dt}$ هو:

$$i_p(t)=\frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z}\sin(\gamma\ \mathrm{t})-\frac{X}{Z^2}\cos(\gamma\ \mathrm{t})\right)$$

6.6 المخرجات التعليمية للفصل (Learning outcomes)

بعد الانتهاء من دراسة الفصل السادس، يكون الطالب قد أتقن المخرجات التعليمية الآتية:

1. التمييز بين المشاكل التي يمكن حلها باستخدام المعادلات التفاضلية ذات الرتب العليا عن الرتبة الأولى.
2. إعادة كتابة مشكلة معينة بصيغة معادلات تفاضلية من أجل حلها.
3. استخدام المعادلات التفاضلية لإيجاد حل معادلة الاهتزاز الحر.
4. استخدام المعادلات التفاضلية لإيجاد حل معادلة الاهتزاز الحر المخمد.
5. استخدام المعادلات التفاضلية غير المتجانسة لحل معادلات الاهتزازات القسرية المخمدة.
6. استخدام المعادلات التفاضلية غير المتجانسة لحل معادلات الاهتزازات القسرية بدون إخماد.
7. استخدام المعادلات التفاضلية غير المتجانسة لحساب التيار وكمية الشحنة في الدارات الكهربائية.
8. تفسير ظاهرة سقوط الجسور المعلقة بالهواء.
9. المقدرة على استخدام القرص الممغنط المرافق للكتاب لمراجعة محتويات الكتاب والاطلاع على الفلم الخاص بسقوط جسر تاكوما.

تمارين الفصل السادس

1. لتكن حركة الاهتزاز الحر ممثلة بالمعادلة التفاضلية الآتية : $\frac{d^2x}{dt^2}+4x=0$

جد معادلة الاهتزازعلماً بأن: $x(0)=2 \quad , \quad x'(0)=4$ **.**

2. يستطيل نابض حلزوني بمقدار 8 أقدام عند تعليق ثقل وزنه 64 رطلاً في نهايته. فإذا سحب الثقل من وضع الاتزان نحو الاسفل بمقدار 4 أقدام ثم أطلق نحو الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 2 قدم/ ثانية . جد معادلة حركة الاهتزاز.

جد معادلة حركة الاهتزازمستخدماً المعادلات والشروط الابتدائية من 3 - 7 :

.3 $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+5x=0 \quad , \quad x(0)=1 \quad , x'(0)=3$

.4 $4x''+12x'+5x=0 \quad , \quad x(0)=1 \quad , \quad x'(0)=3$

.5 $x''+2x'+x=0 \quad , \quad x(0)=-1 \quad , x'(0)=2$

.6 $x''+4x'+7x=0 \quad , \quad x(0)=2 \quad , x'(0)=6$

.7 $4x''+4x'+x=0 \quad , \quad x(0)=4 \quad , \quad x'(0)=-1$

8. علق جسم وزنه 16 رطلاً في نهاية نابض حلزوني فسبب زيادة في طوله مقدارها 4 أقدام. سحب الجسم عن خط الاتزان نحو الأسفل بمقدار 3 أقدام وبسرعة نحو الأعلى مقدارها 2 قدم / ثانية ، فأوجد معادلة الاهتزاز إذا كانت مقاومة الوسط المحيط بالجسم ضعف سرعته اللحظية. ثم جد الزمن اللازم لمرورالجسم من خط الاتزان.

9. علق جسم يزن 16 رطلاً برأس نابض حلزوني فسبب زيادة في الطول مقدارها 4 أقدام . إذا كانت مقاومة الوسط المحيط بالجسم هي $\sqrt{2}$ السرعة اللحظية، فأوجد معادلة الاهتزازعلماً بان الجسم أزيح عن خط الاتزان نحو الأسفل بمقدار 3 أقدام وبسرعة نحو الأعلى مقدارها 2 قدم /ثانية . ثم جد سعة الاهتزاز وزاوية الطور والزمن اللازم كي يمر الجسم من خط الاتزان.

10. علق جسم يزن 24 رطلاً في نهاية نابض حلزوني فسبب زيادة في الطول مقدارها 4 أقدام. إذا كانت مقاومة الوسط المحيط للجسم 3 أضعاف السرعة اللحظية، فأوجد معادلة الاهتزاز علماً بان الجسم أزيح عن خط الاتزان واطلق من السكون (بسرعة صفر) من على مسافة *2* قدمان نحو الأسفل. ثم جد الزمن اللازم كي يمر الجسم من خط الاتزان، وسعة الاهتزاز وزاوية الطور مع الرسم.

11. علق جسم يزن *8* رطلاً في نهاية نابض حلزوني طوله *3* أقدام فاصبح طوله *7* أقدام. إذا كانت مقاومة الوسط المحيط بالجسم تساوي $\frac{1}{2}$ السرعة اللحظية، جد معادلة الاهتزازعلماً بان الجسم أزيح عن خط الاتزان نحو الأسفل بمقدار *3* أقدام وبسرعة نحو الأعلى مقدارها *4* أقدام /ثانية . ثم جد الزمن اللازم كي يمر الجسم من خط الاتزان؛ والزمن اللازم كي يصل إحدى نهايتيه العظمى والصغرى.

12. علق جسم يزن 16 رطل في نهاية نابض حلزوني طوله 6 أقدام فأصبح طوله بعد التعليق 10 أقدام . إذا كانت مقاومة الوسط المحيط للجسم هي $\sqrt{3}$ السرعة اللحظية، فاوجد معادلة الاهتزاز علماً بان الجسم أزيح عن خط الاتزان نحو الأسفل بمقدار 2 قدمان وبسرعة نحو الأعلى مقدارها 3 أقدام /ثانية . ثم جد الزمن اللازم كي يمر الجسم من خط الاتزان أول مرة، وما أقصى سعة للاهتزاز؟

13. علق جسم يزن 8 أرطال في نهاية نابض حلزوني طوله 4 أقدام فاصبح طوله 8 أقدام. إذا كانت مقاومة الوسط المحيط بالجسم هي $\frac{1}{2}$ السرعة اللحظية، فاوجد معادلة الاهتزاز علماً بان الجسم أزيح عن خط الاتزان نحو الأسفل بمقدار 2 قدمين وبسرعة نحو الأسفل مقدارها 3 أقدام / ثانية . ثم جد الزمن اللازم كي يمر الجسم من خط الاتزان للمرة الثانية.

14. علق جسم كتلته 20 كغم في النهاية الحرة لنابض حلزوني. احسب معامل النابض اذا علمت أنّ تردد الاهتزاز الحر هو $\frac{2}{\pi}$ هزة في الثانية . ثم جد تردد الاهتزاز الحر اذا استبدلنا الجسم الاصلي بآخر وزنه 80 كغم.

15. علق جسم يزن 1 كغم في نهاية نابض حلزوني معامل ثابته 16 نيوتن/متر ثم استقرعند خط الاتزان. سحب الجسم بمقدار 1 متر تحت خط الاتزان واطلق من السكون (بسرعة صفر) . جد معادلة الاهتزاز الحر المخمد إذا علمت ان الاهتزاز يحدث وسط سائل لزج مقاومته تساوي 10 السرعة اللحظية للاهتزاز، ثم ارسم معادلة الاهتزاز الحر المخمد.

16. علق جسم يزن 40 غم في نهاية نابض حلزوني فسبب زيادة في طول الحلزون مقدارها 10 سم ثم استقرعند خط الاتزان. من عند خط الاتزان اطلق الجسم بسرعة نحو الأسفل مقدارها 2 سم/ثا ، جد معادلة الاهتزاز الحر المخمد إذا علمت ان الاهتزاز يحدث وسط سائل لزج مقاومته تساوي 560 السرعة اللحظية للاهتزاز، ثم ارسم معادلة الاهتزاز الحر المخمد.

17. علق جسم يزن 16 رطلاً برأس نابض حلزوني فسبب زيادة في الطول مقدارها $\frac{8}{3}$ قدم. أزيح الجسم عن خط الاتزان واطلق من السكون (بسرعة صفر) من على مسافة 2 قدمين نحو الأسفل في وسط مقاومته تساوي $\frac{1}{2}$ السرعة اللحظية. فأوجد معادلة الاهتزاز القسري علماً بان القوى الخارجية المؤثرة على الجسم تساوي $f(t) = 10\cos(3t)$.

18. بين أنّ حل معادلة الاهتزاز القسري :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \cos(\gamma t), \quad \omega \neq \gamma, \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

هو:

$$x(t) = \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2}(\cos\gamma t - \cos\omega t)$$

19. علق جسم يزن 2 كغم في نهاية نابض حلزوني معامل ثابته 32 نيوتن/متر ثم استقرعند خط الاتزان. جد معادلة الاهتزاز القسري، إذا علمت ان القوة المؤثرة هي: $f(t) = 68e^{-2t}\cos 4t$ ابتداءً من زمن $t = 0$ وبغياب الاخماد.

20. جد كمية الشحنة على المحاثة عند اللحظة (ثانية) $t = 0.01$ في دارة (محاثة - مقاومة - متسعة) والتي فيها $R = 2\Omega,\ L = 0.05H,\ C = 0.01F,\ E(t) = 0$ ، إذا علمت ان $i(0) = 0,\ q(0) = 5C$.

21. **جد كمية الشحنة والتيار في حالة الاستقرار لدارة بسيطة من نوع (L-R-C) تتألف من محاثة 1 هنري، ومقاومة 2 أوم ، ومتسعة *0.25* فاراد، مربوطة على التوالي مع بطارية قوتها الدافعة الكهربائية $E(t)=50\cos t$.**

22. **تتكون دارة كهربائية من محاثة 0.1 هنري ومقاومة قدرها 20 أوم ومتسعة 25 ميكروفاراد (ميكروفاراد = 10^{-16} فاراد)، وقوتها الدافعة الكهربائية: $E(t)=17\cos 2t$ فولت. جد الشحنة $q(t)$ وشدة التيار $i(t)$ عند الزمن t علماً بان الشروط الابتدائية :**

1. $q(0)=0.05 \quad , i(0)=0$

2. $q(0)=0.05 \quad , \quad i(0)=0.2$

23. **جد التيار في حالة الاستقرار لدارة بسيطة من نوع (L-R-C) تتألف من محاثة $\frac{1}{2}$ هنري، ومقاومة 20 أوم ، ومتسعة *0.001* فاراد، مربوطة على التوالي مع بطارية قوتها الدافعة الكهربائية $E(t)=100\sin(60\,t)$.**

24. **جد كمية الشحنة على المتسعة والتيار في دارة بسيطة من نوع (L-C) تتألف من محاثة 0.1 هنري، ومتسعة 0.1 فاراد، مربوطة على التوالي مع بطارية قوتها الدافعة الكهربائية $E(t)=100\sin(\gamma\,t)$ ، إذا علمت أنّ $q(0)=0$ و $i(0)=0$.**