الفصل السابع

حل المعادلات التفاضلية الخطية باستخدام سلاسل القوى

Solving linear differential equations by power series

نتناول في هذا الفصل طريقة عامة شاملة لحل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى والثانية وبمعاملات متغيرة. في الحقيقة أنّ الطرائق كافة التي تناولناها في الفصول السابقة لا تعطي حلاً للمعادلات التفاضلية بمعاملات متغيرة باستثناء معادلة كوشي – أويلر وهي بحد ذاتها تعدّ معادلة خاصة من نمط خاص، أي لا تعدّ طريقة عامة. وكذلك طريقة اختزال الرتبة يمكن ان تستخدم لحل المعادلات التفاضلية بمعاملات متغيرة ولكن يجب ان يعطى الحل الأول ويطلب إيجاد الحل الثاني. تعدّ طريقة سلاسل القوى أولى طريقة لحل معادلات تفاضلية عامة تشمل المعاملات المتغيرة، كما سنشاهد لاحقاً. يعود الفضل في تطوير هذه الطريقة الى كل من:

- الرياضي الألماني فيرديناند فروبنيس (Ferdinand Frobenius) الذي درس في برلين وزيوريخ وعاش خلال الفترة (1849- 1917م). شملت اسهاماته في الرياضيات بالاضافة الى المعادلات التفاضلية الاعتيادية والجزئية حقل الجبر وخاصة خصائص الزمر، ومحاولته دراسة نظام الأعداد العقدية الموسع.
- الرياضي والفلكي الألماني فريدريك بيسل (Friedrich Bessel) الذي عاش خلال الفترة (1784- 1846م) وعاصر الرياضي جاوس، ويعد أول عالم فلكي استطاع حساب بعد نجم ثابت، وفي عام 1844م اكتشف النجم Sirius اكثر النجوم لمعاناً في السماء.
- الرياضي الفرنسي أدرين ليجندر (Adrien Legendere) الذي عاش خلال الفترة (1752- 1833م) واستخدم الحدودية المعروفة باسمه في حساب الجاذبية الأرضية والتكامل الهذلولي (Elliptic integrals).

7.1 مراجعة لسلاسل القوى (Review to power series)

نستعرض في هذا البند مراجعة سريعة لسلاسل القوى ومجال تقاربها مع بعض الأمثلة والخصائص.

تأمل السلسلة:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \Lambda + c_n(x-a)^n + \Lambda \qquad (7.1)$$

حيث إنّ: $c_k \ (k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots)$ و a ثوابت حقيقية. تدعى (7.1) بـ "سلسلة القوى".

عندما $a = 0$ ، فإنّ سلسلة القوى تصبح:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \Lambda \quad (7.2)$$

المثال (1): حدد الثوابت $c_k \ (k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots)$ و a لسلاسل القوى الآتية:

ت	سلسلة القوى	$c_k \ (k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots)$	a
1	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$	1	0
2	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!}$	$\frac{1}{k!}$	1
3	$\sum_{k=0}^{\infty} (k!)(x+1)^k$	$k!$	-1
4	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$	$\frac{1}{k}$	0
5	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-2)^k}{10^k}$	$\frac{(-1)^k}{10^k}$	2
6	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(10)^k}{k!} (x+4)^k$	$\frac{(10)^k}{k!}$	-4

ملاحظات:

عندما يرد ذكر سلسلة فالمقصود بها سلسلة غير منتهية ويرمز لها بالرمز $\sum$ ، أي لا توجد سلاسل منتهية في نطاق دراستنا.

قد يبدأ الدليل السفلي ($k = 0$) للسلسلة والذي يكتب اسفل الرمز $\sum_{k=0,1,\Lambda}$ من العداد صفر أو 1 (يعني: $k = 1$) أو أي عدد موجب أكبر من الصفر. أما الدليل العلوي الذي يكتب أعلى الرمز $\sum^{k=\infty}$ فهو عادة ∞ (اللانهاية)، سواءً كتبت أم لا .

الآن نعطي أهم خصائص سلاسل القوى ومفاهيمها الأساسية التي سنحتاجها لاحقاً:

1. تبديل دليل السلسلة: يمكن تبديل دليل السلسلة من صيغة إلى أخرى حسب الحاجة، مع الاحتفاظ بالقاعدة العامة للسلسلة، أي السلسلة الأصلية والسلسلة المحورة متكافئتين، كما في المثال (2).

المثال (2): السلاسل الآتية متكافئة:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k(k+1)} \equiv \sum_{i=2}^{\infty}\frac{x^{i-1}}{i(i-1)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \equiv \sum_{s=5}^{\infty}\frac{x^{s-4}}{(s-4)(s-3)}$$

2. إجراء عمليات حسابية: يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب، والقسمة على السلاسل لتبسيطها كما في الأمثلة: (3) و (4) و (5).

المثال (3): حور السلسلتين الآتيتين ثم اجرعملية الجمع عليهما وضع الناتج بصورة سلسلة منفردة:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k(k+1)} + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{x^i}{i(i-1)}$$

الحل: نبدأ أولا بتوحيد الدليل السفلي للسلسلتين: السلسلة الأولى من جهة اليسار تبدأ من x^1 في حين السلسلة الثانية تبدأ من x^2 ، عليه نسحب حداً واحداً من السلسلة الأولى فتصبح مطابقة للسلسلة الثانية، كما يأتي:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k(k+1)} + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{x^i}{i(i-1)} = \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k(k+1)} + \underbrace{\sum_{i=2}^{\infty}\frac{x^i}{i(i-1)}}_{i=k}$$

نضع $i = k$ في السلسلة الثانية فنحصل على:

$$= \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k(k+1)} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k(k-1)}$$

الآن أصبحت السلسلتين متفقتين (موحدتين) وجاهزتين للجمع؛ بالجمع نحصل على:

$$= \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{(k-1)}\right)x^k$$

$$= \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2x^k}{(k+1)(k-1)}$$

المثال (4): حور السلسلتين الآتيتين ثم اجر عملية الجمع عليهما وضع الناتج بصورة سلسلة منفردة:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)} - \sum_{i=2}^{\infty}\frac{x^{i-1}}{(i-1)(i+1)}$$

الحل: نبدأ أولا بتوحيد الدليل السفلي للسلسلتين: السلسلة الأولى من جهة اليسار تبدأ من x^2 في حين

السلسلة الثانية تبدأ من x^1 ، عليه نسحب حداً واحداً من السلسلة الأولى فتصبح مطابقة للسلسلة الثانية،

كما يأتي:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)} - \sum_{i=2}^{\infty}\frac{x^{i-1}}{(i-1)(i+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)} - \frac{x}{3} - \sum_{i=3}^{\infty}\frac{x^{i-1}}{(i-1)(i+1)}$$

نضع $i-1=k+1$ ، أي $i=k+2$ ، في السلسلة الثانية فنحصل على:

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)} - \frac{x}{3} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)(k+3)}$$

الآن السلسلتان متطابقتان ولهما البداية والدليل نفسهما، بالطرح نحصل على:

$$=-\frac{x}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+3)}\right)x^{k+1}$$

$$=-\frac{x}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+3)}\right)x^{k+1}$$

$$=-\frac{x}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3x^{k+1}}{k(k+1)(k+3)}$$

وعليه فعند جمع أو طرح سلسلتين، نبقي إحدى السلسلتين ثابتة بدون تغيير، ونجري تحويراً للسلسلة الأخرى بحيث تتفق مع الأولى من حيث الدليل السفلي، أي أنّ السلسلتين تصبحان متكافئتين ولهما البداية نفسها ثم نجري العملية الحسابية المطلوبة. لا مانع من إجراء تحوير على السلسلتين وجعلهما تكافئان سلسلة ثالثة حسب الطلب ولكن نفضل الإجراء الأول للسهولة.

المثال (5): حور السلاسل الآتية ثم اجرالعمليات الحسابية المطلوبة وضع الناتج بصورة سلسلة منفردة:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n\, x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$$

الحل: نلاحظ أنّ السلسلة الأولى من جهة اليسار تبدأ من x^1 في حين السلسلة في الوسط تبدأ من x^2، لكن السلسلة الثالثة تبدأ من x^0. سنحاول توحيد البدء ونجعل السلاسل الثلاث متفقة مع بعضها ولتكن البداية x^2 للسلاسل الثلاثة قبل إجراء العمليات الحسابية:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n\, x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$$

$$= 2c_2x + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n\, x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n\, x^{n+1} + c_0 + c_1x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n\, x^n$$

الآن السلاسل الثلاث تبدأ من x^2 ، أي متفقة مع بعضها. نثبت السلسلة الوسطى ونغير البقية بجعل الدليل السفلي $k=1$: نعوض في السلسلة الأولى : $n-1=k+1$ وفي السلسلة الثالثة: $n=k+1$، فنحصل على:

$$= 2c_2x + c_0 + c_1x + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n\, x^{n-1}}_{n-1=k+1} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nc_n\, x^{n+1}}_{n=k} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, x^n}_{n=k+1}$$

$$= 2c_2x + c_0 + c_1x + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}\, x^{k+1} - \sum_{k=1}^{\infty} kc_k\, x^{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1}\, x^{k+1}$$

$$= c_0 + (c_1 + 2c_2)x + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_{k+2} - kc_k + c_{k+1}\right]x^{k+1}$$

3. تقارب السلاسل (Convergence of series): لتحديد تقارب سلاسل القوى، نقوم بتحويل السلسلة إلى متتابعة، كما يأتي:

$$\begin{aligned}
S_1 &= c_0\,, \\
S_2 &= c_0 + c_1(x-a)\,, \\
S_3 &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2\,, \\
&\vdots \\
S_{N+1} &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_N(x-a)^N \\
&= \sum_{n=0}^{N} c_N(x-a)^n
\end{aligned}$$

تسمى $\{S_n(x)\}$ بمتتابعة المجاميع الجزئية للسلسلة (Sequence of partial sums).

يقال بأنّ سلسلة القوى (7.1) متقاربة عند نقطة معينة x إذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية للسلسلة $\{S_n(x)\}$ متقاربة. أي أنّ:

$$\lim_{N \to \infty} S_N(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n$$

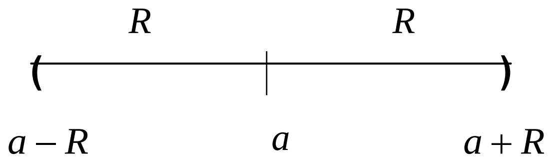
موجود. وإذا كانت النهاية غير موجودة فإنّ السلسلة تدعى متباعدة.

لكل سلسلة قوى فترة تقارب (Interval of convergence)، تعرف بأنها مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تكون عندها السلسة متقاربة.

ليكن R طول نصف فترة تقارب (Radius of convergence) سلسلة القوى (7.1) عندئذٍ :

- **إذا كانت $R > 0$: فإنّ سلسلة القوى (7.1) متقاربة على الفترة: $|x-a| < R$ و متباعدة على الفترة: $|x-a| > R$.**
- **إذا كانت $R = 0$: فإنّ سلسلة القوى (7.1) متقاربة عند مركز الفترة a .**
- **إذا كانت $R = \infty$: فإنّ سلسلة القوى (7.1) متقاربة لجميع قيم x .**

يمكن إعادة كتابة الفترة: $|x-a| < R$ بشكل متباينة: $a - R < x < a + R$. كما موضح في الشكل (7.1):



الشكل (7.1)

4. التقارب المطلق (Absolute convergence)

تكون سلاسل القوى متقاربة بشكل مطلق خلال فترة تقاربها. أي اذا كانت x تنتمي الى فترة تقارب سلسلة القوى المفتوحة، فإنّ السلسلة: $\sum_{n=0}^{\infty} \left| c_n (x-a)^n \right|$ متقاربة.

5. اختبار النسبة (Ratio test) يمكن استخدام اختبار النسبة لمعرفة السلسلة (7.1) متقاربة أم متباعدة. نفرض أن $c_n \neq 0$ لجميع قيم n ، وليكن:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n (x-a)^n} \right| = |x-a| \left(\lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \right) = L$$

- **إذا كانت $L < 1$ ، فإنّ السلسلة (7.1) متقاربة مطلقاً،**
- **إذا كانت $L > 1$ ، فإنّ السلسلة (7.1) متباعدة،**
- **إذا كانت $L = 1$ ، فإنّ الاختبار فاشل.**

المثال (6): اختبر تقارب سلسلة القوى: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n n}$

الحل: نستخدم اختبار النسبة:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}}{\frac{(x-3)^n}{2^n n}}\right| = |x-3|\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2(n+1)}\right|\right)=\frac{1}{2}|x-3|\ ;$$

السلسلة متقاربة بشكل مطلق عندما: $\frac{1}{2}|x-3|<1$ **، أي أنّ:** $|x-3|<2$**. عليه فإنّ السلسلة متقاربة على الفترة المفتوحة:** $1<x<5$ **.**

6. دوال سلاسل القوى: لقد بينا في البند (1.3) من الفصل الأول أنّ حل المعادلة التفاضلية هو عبارة عن دالة معرفة على مجالها. من جانب آخر كل سلسلة قوى يمكن تمثيلها بدالة مجالها هو فترة تقارب السلسلة، أي ان حل المعادلة التفاضلية هو دالة يمكن تمثيلها بسلسلة قوى، ولهذا السبب نستخدم سلاسل القوى في حل المعادلات التفاضلية.

الآن لتكن R **نصف فترة تقارب سلسلة القوى (7.1) ؛ عندئذٍ إذا كانت** $R>0$ **، فإنّ الدالة** f **متصلة وقابلة للاشتقاق، وقابلة للتكامل على الفترة:** $(a-R,a+R)$**. أكثر من ذلك يمكن ايجاد كل من** $f'(x)$ **و** $\int f(x)\,dx$ **باشتقاق أو تكامل كل حد على انفراد.**

لنفرض أنّ $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ **تمثل سلسلة قوى بالمتغير** x **، بالاشتقاق مرتين نحصل على:**

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}n\,c_n(x-a)^{n-1} \quad \text{و} \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\,c_n(x-a)^{n-2} \qquad \textbf{(7.3)}$$

نلاحظ أنّ الدليل السفلي في السلسلة الأولى (سلسلة المشتقة الأولى) يبدأ من العدد 1 لأنّ الحد الأول عندما $n=0$ **يساوي صفراً؛ كما أنّ الدليل السفلي في السلسلة الثانية (سلسلة المشتقة الثانية) يبدأ من العدد 2 لأنّ الحدين الأول والثاني، عندما** $n=0,1$ **، يساوي صفراً.**

7. الدوال التحليلية: يقال إنّ الدالة f تحليلية عند نقطة a إذا استطعنا تمثيلها بسلسلة قوى من النمط $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ مجال تقاربها الفترة: $(a-R, a+R)$، وإن نصف فترة التقارب R هي موجبة او غير منتهية.

يمكن استخدام سلسلة مكلورين (Maclaurin series) التي تعتبر حالة خاصة من سلسلة تايلور (Taylor series) ، حيث $a=0$ ، لتمثيل بعض الدوال الخاصة بدلالة سلسلة القوى (7.2)، كما في الأمثلة الآتية:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \Lambda + \frac{x^n}{n!} + \Lambda$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \Lambda + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \Lambda$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \Lambda + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \Lambda$$

الدوال الثلاث السابقة متقاربة على الفترة: $|x| < \infty$ وتحليلية عند النقطة $x=0$ ، وتسمى سلسلة مكلورين (Maclaurin series) نسبة الى الرياضي مكلورين.

8. خاصية التباين: إذا كانت سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = 0$ و $R > 0$ لجميع قيم x التي تنتمي الى مجال تقارب السلسلة ، فإنّ $c_n = 0$.

7.2 النقاط الاعتيادية والمنفردة (Ordinary and singular points)

تأمل الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (7.4)$$

حيث إنّ: $a_0(x)$ و $a_1(x)$ ، و $a_2(x)$ دوال بالمتغير x.

لقد بينا في الفصل الثاني أنّ المعادلة (7.4) تكافىء:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (7.5)$$

حيث إنّ $P(x)$ و $Q(x)$ دالتان بالمتغير x.

التعريف (7.1): تسمى النقطة x_0 بـ "النقطة الاعتيادية" للمعادلة التفاضلية (7.5) إذا كانت كل من $P(x)$ و $Q(x)$ دالة تحليلية عند النقطة x_0. إذا لم تكن النقطة اعتيادية تسمى "نقطة منفردة" للمعادلة التفاضلية (7.5).

المثال (1):

كل عدد حقيقي هو نقطة اعتيادية للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + (e^x)y' + (\sin x)y = 0$$

لأنّ e^x و $\sin x$ دالتان تحليليتان عند جميع نقاط الاعداد الحقيقية. وبصورة خاصة $x = 0$ هي نقطة اعتيادية للمعادلة المذكورة.

المثال (2):

النقطة $x = 0$ هي نقطة منفردة للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + (e^x)y' + (\ln x)y = 0$$

لأنّ $\ln x$ دالة غير متصلة عند $x = 0$ أي لا يمكن تمثيلها بسلسلة قوى بالمتغير x، وعليه فهي غير تحليلية.

المثال (3):

جد النقاط الاعتيادية والمنفردة (إن وجدت) للمعادلة التفاضلية:

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y = 0$$

الحل: جميع نقاط الاعداد الحقيقية هي نقاط اعتيادية باستثناء النقاط التي فيها:

$$a_2(x) = (x^2 - 1) = 0$$

أي أنّ: $x = \pm 1$ هما نقطتان منفردتان للمعادلة التفاضلية.

المثال (4): جد النقاط الاعتيادية والمنفردة (إن وجدت) للمعادلة التفاضلية:

$$(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$$

الحل: جميع نقاط الاعداد العقدية والحقيقية هي نقاط اعتيادية باستثناء النقاط التي فيها:

$$a_2(x) = (x^2 + 1) = 0$$

أي أنّ: $x = \pm i$ هما نقطتان منفردتان للمعادلة التفاضلية.

الجدول الآتي يبين النقاط المنفردة (إن وجدت) للمعادلات التفاضلية المبينة إزاءها:

ت	المعادلة التفاضلية	النقاط المنفردة
1	$(x^2-4)y''+2xy'+3y=0$	± 2
2	$(x^2+2)y''+2xy'+6y=0$	$\pm i\sqrt{2}$
3	$x^2y''+2xy'-3y=0$	0
4	$y''+2xy'+6y=0$	لا يوجد
5	$(x^2-2x+5)y''+2xy'+6y=0$	$1\pm 2i$

الآن سنبين متى يكون للمعادلة التفاضلية حل سلاسل قوى:

المبرهنة (7.1): وجود حلول من نمط سلاسل القوى

اذا كانت $x=x_0$ نقطة اعتيادية للمعادلة التفاضلية (7.4) فعندئذٍ يوجد حلان مستقلان خطياً حول النقطة x_0 من نمط سلاسل قوى: $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$. ويكون الحل متقارباً على الأقل في الفترة: $|x-x_0|<R$ ، حيث R هي المسافة بين النقطة الاعتيادية x_0 واقرب نقطة منفردة.

ملاحظة: المبرهنة (7.1) تضمن للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية وجود حلين مستقلين خطياً عند النقطة الاعتيادية ويكون الحل متقارباً؛ في حالة المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى فإنّ المبرهنة نفسها تضمن وجود حل واحد على الأقل من نمط سلاسل القوى متقارب أيضاً.

التعريف (7.2): يدعى حل سلاسل قوى من النمط: $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ بـ "الحل حول النقطة الاعتيادية x_0 "

7.3 الحلول حول نقطة اعتيادية (Solutions about ordinary point)

الآن أصبحنا جاهزين لايجاد حل المعادلات التفاضلية حول النقطة الاعتيادية باستخدام سلاسل القوى، سنبدأ بمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ويمكن حلها بالطرائق التحليلية القياسية التي استخدمناها في الفصل الأول من أجل المقارنة.

المثال (1): استخدم سلاسل القوى لحل المعادلة التفاضلية الآتية ثم قارن الحل باستخدام طريقة فصل المتغيرات:

$$y' - 2xy = 0$$

الحل:

1- الحل باستخدام سلاسل القوى: نظراً لعدم وجود نقطة منفردة للمعادلة التفاضلية، فإنّ المبرهنة (7.1) تضمن لنا وجود حل عند النقطة الاعتيادية $x_0 = 0$ من نمط سلاسل قوى متقاربة على الفترة: $|x| < \infty$.

نفرض أنّ الحل: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ، بالاشتقاق نحصل على: $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^{n-1}$ ، وبالتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على:

$$y' - 2xy = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

وبالتبسيط، نحصل على:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

نلاحظ أنّ السلسلة الأولى من جهة اليسار تبدأ من x^0 في حين أنّ السلسلة الثانية تبدأ من x . عليه نسحب حداً واحداً من السلسلة الأولى كما فعلنا في البند الأول، فنحصل على:

$$c_1 + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n\, c_n x^{n-1}}_{n-1=k+1} - 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}}_{n=k} = 0$$

أي أنّ:

$$c_1 + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\, c_{k+2} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^{k+1} = 0$$

الآن السلسلتان جاهزتان ومتطابقتان، بالطرح نحصل على:

$$c_1 + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)\, c_{k+2} - 2c_k]\, x^{k+1} = 0$$

عليه من خاصية التباين نحصل على:

$c_1 = 0$ **و** $(k+2)\, c_{k+2} - 2c_k = 0$ ، **للقيم** $k = 0, 1, 2, \ldots$ ؛ **ومنها نجد:**

$$c_{k+2} = \frac{2c_k}{(k+2)} \;,\; k = 0,1,2,\Lambda$$

المعادلة السابقة تسمى بـ "العلاقة التكرارية" (Recurrence relation) التي منها نحصل على قيم الثوابت، كما موضح في أدناه:

$c_0 \neq 0$ (والا الحـــل هـــو الحـــل الصـــفري) ، $c_1 = 0$ ، $c_2 = c_0$ ، $c_3 = \frac{2}{3}c_1 = 0$ ،

$c_4 = \frac{2c_2}{4} = \frac{1}{2}c_0$ ، $c_5 = \frac{3}{5}c_3 = 0$ ، $c_6 = \frac{2c_4}{6} = \frac{1}{6}c_0$ ، ... الخ.

أي أنّ: $c_1 = c_3 = c_5 = \Lambda = 0$ ، $c_2 = c_0$ ، $c_4 = \frac{1}{2}c_0$ ، $c_6 = \frac{1}{6}c_0$ ،...

عليه الحل هو:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \Lambda$$

$$= c_0 + 0\,x + c_0 x^2 + 0\,x^3 + \frac{1}{2}c_0 x^4 + 0\,x^5 + \frac{1}{6}c_0 x^6 + \Lambda$$

$$= c_0(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \Lambda\,)$$

$$= c_0\left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \Lambda\right)$$

$$= c_0 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(x^2)^n}{n!}\right)$$

إذاً الحل عند النقطة المنفردة $x_0 = 0$ هو:

$$y = c_0\, e^{x^2} \qquad (7.6)$$

2. الحل باستخدام فصل المتغيرات: باجراء فصل المتغيرات للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$ ،

تصبح: $\frac{dy}{y} = 2x$ ، وباجراء عملية التكامل نحصل على:

$$\ln|y| = x^2 + c \;,$$

ومنه نحصل على:

$$y = e^{x^2+c} = c_0 e^{x^2} \qquad (7.7)$$

حيث إنّ الثابت $c_0 = e^c$.

لاحظ أنّ الحلين (7.6) و (7.7) هما متساويان. في الحقيقة نستخدم سلاسل القوى لايجاد حلول المعادلات التفاضلية التي معاملاتها متغيرة ولا يمكن حلها بالطرق التحليلية التي تعلمناها سابقاً.

المثال (2): استخدم سلاسل القوى لحل المعادلة التفاضلية الآتية عند النقطة الاعتيادية $x_0 = 0$.

$$y'' + xy = 0$$

الحل: نظراً لعدم وجود نقطة منفردة للمعادلة التفاضلية، فإنّ المبرهنة (7.1) تضمن لنا وجود حلين مستقلين خطياً عند النقطة الاعتيادية $x_0 = 0$ من نمط سلاسل قوى متقاربة على الفترة: $|x| < \infty$.

نفرض أنّ الحل: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ، بالاشتقاق نحصل على:

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \text{ ، } y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^{n-1}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على:

$$y'' + xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

وبالتبسيط، نحصل على:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

نلاحظ أنّ السلسلة الأولى من جهة اليسار تبدأ من x^0 في حين أنّ السلسلة الثانية تبدأ من x . عليه نسحب حداً واحداً من السلسلة الأولى كما فعلنا في البند الأول، فنحصل على:

$$2c_2 + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-2}}_{n-2=k+1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}}_{n=k} = 0$$

أي أنّ:

$$2c_2 + \sum_{k=0}^{\infty} (k+3)(k+2)\, c_{k+3} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0$$

الآن السلسلتان جاهزتان للجمع، بالجمع نحصل على:

$$2c_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \left((k+3)(k+2)\, c_{k+3} + c_k\right) x^{k+1} = 0$$

عليـــه: $c_2=0$ **و** $(k+3)(k+2)\,c_{k+3}+c_k=0$ ، $k=0,1,2,\Lambda$ ؛ **ومنهــا نجــد العلاقة التكرارية:**

$$c_{k+3}=-\frac{c_k}{(k+2)(k+3)}\ ,\ k=0,1,2,\Lambda$$

التي منها نحصل على قيم الثوابت:

$c_0\neq 0$ ، $c_1\neq 0$ **(والا الحل هو الحل الصفري)** ، $c_2=0$ ، $c_3=-\frac{1}{2.3}c_0$ ،

$c_4=-\frac{1}{3.4}c_1$ ، $c_5=-\frac{c_2}{4.5}=0$ ، $c_6=-\frac{1}{5.6}c_3=\frac{1}{(2.3.5.6)}c_0$ ،

$c_7=-\frac{c_4}{(2.3)(7)}=\frac{1}{(3.4.6.7)}c_1$ ، **... الخ.**

أي أنّ:

$$c_2=c_5=c_8=\Lambda=0$$

$$c_3=-\frac{1}{2.3}c_0$$

$$c_4=-\frac{1}{3.4}c_1$$

$$c_6=\frac{1}{(2.3.5.6)}c_0$$

$$c_7=\frac{1}{(3.4.6.7)}c_0$$

عليه الحل هو:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+c_6x^6+\Lambda$$

$$=c_0+c_1\,x+0x^2-\frac{1}{2.3}c_0\,x^3\,\frac{1}{3.4}c_1x^4+0\,x^5+\frac{1}{(2.3.5.6)}c_0x^6+\frac{1}{(6)(7)(12)}c_1+\Lambda$$

$$=c_0(1-\frac{1}{(2.3)}x^3+\frac{1}{(2.3.5.6)}x^6+\Lambda)+c_1(x-\frac{1}{(3.4)}x^4+\frac{1}{(3.4.6.7)}x^7+\Lambda)$$

إذاً الحلان عند النقطة المنفردة $x_0=0$ **هما:**

$$y_1(x)=c_0(1-\frac{1}{(2.3)}x^3+\frac{1}{(2.3.5.6)}x^6+\Lambda\ )=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2.3...(3k-1)(3k)}x^{3k}$$

$$y_2(x)=c_1(x-\frac{1}{(3.4)}x^4+\frac{1}{(3.4.6.7)}x^7+\Lambda\ )=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3.4...(3k)(3k+1)}x^{3k+1}\ .$$

والحل العام هو:

$$y(x)=c_0y_1(x)+c_1y_2(x)$$

لقد فرضنا في المثال السابق: $c_0 \neq 0$ و $c_1 \neq 0$؛ لأنه إذا كان كل من $c_0=0$ و $c_1=0$ فعندئذٍ نحصل على الحل الصفري. وإذا فرضنا أحدهما صفراً فعندئذٍ نحصل على أحد الحلين، ويمكننا ايجاد الحل الثاني بطريقة اختزال الرتبة التي تعلمناها في الفصل الخامس.

المثال (3): استخدم سلاسل القوى لحل المعادلة التفاضلية $(x^2+1)y''+xy'-y=0$ عند النقطة الاعتيادية $x_0=0$.

الحل: توجد في هذا المثال نقطتان منفردتان للمعادلة التفاضلية، هما $\pm i$. عليه فإنّ الصفر هي نقطة اعتيادية للمعادلة التفاضلية والمبرهنة (7.1) تضمن لنا وجود حلين مستقلين خطياً عند النقطة الاعتيادية $x_0=0$ من نمط سلاسل قوى متقاربة على الفترة: $|x|<1$ ، حيث إنّ نصف فترة التقارب تساوي 1 وهو المسافة بين النقطة الاعتيادية $x_0=0$ واقرب نقطة منفردة ولتكن i .

نفرض أنّ الحل: $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ ، بالاشتقاق نحصل على:

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}\ \text{،}\ y'=\sum_{n=1}^{\infty}n\,c_nx^{n-1}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على:

$$(x^2+1)y''+xy'-y=(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

وبالتبسيط، نحصل على:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\,c_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

نلاحظ أنّ السلسلة الأولى من جهة اليسار تبدأ من x^2 والثانية تبدأ من x^0 والثالثة تبدأ من x^1 في حين أنّ السلسلة الرابعة تبدأ من x^0. عليه نسحب حدين اثنين من كل من السلسلة الثانية والرابعة وحداً واحداً من السلسلة الثالثة، فنحصل على:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + 2c_2 + 6c_3 x + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-2} + c_1 x$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n - c_0 - c_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n = 0$$

أي أنّ:

$$(2c_2 - c_0) + 6c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-2}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n = 0$$

الآن السلاسل الاربعة تبدأ من x^2 ، للسهولة نضع: $2c_2 - c_0 = 0, \quad c_3 = 0$

عندئذٍ نحصل على:

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n}_{n=k} + \underbrace{\sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-2}}_{n-2=k} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n}_{n=k} - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n}_{n=k} = 0$$

ومنها نجد:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2} x^k + \sum_{k=2}^{\infty} kc_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k = 0$$

الآن السلاسل الاربعة جاهزة للجمع والطرح، عندئذٍ نحصل على:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left([k(k-1) + (k-1)]c_k + (k+1)(k+2)c_{k+2} \right) x^{k+1} = 0$$

أي أنّ:

$$(k+1)(k-1)c_k + (k+1)(k+2)c_{k+2} = 0 \quad , k = 2, 3, 4, \ldots$$

وباقسمة على $(k+1)$ ، نحصل على:

$$(k+2)c_{k+2} + (k-1)c_k = 0, \ k = 2, 3, 4, \ldots \ \text{،} \ c_2 = \frac{1}{2}c_0 \ \ \text{و} \ \ c_3 = 0$$

ومنها نجد العلاقة التكرارية:

$$\boxed{c_{k+2} = \frac{-(k-1)}{(k+2)} c_k \ \ , \ k = 2, 3, 4, \ldots}$$

التي منها نحصل على قيم الثوابت:

$c_0 \neq 0$ ، $c_1 \neq 0$ **(والا الحـــــل هــــو الحـــــل الصــــفري)**، $c_2 = \frac{1}{2}c_0$ ، $c_3 = 0$ ،

$c_4 = -\frac{1}{4}c_2 = -\frac{1}{2.4}c_0$ ، $c_5 = -\frac{2c_3}{5} = 0$ ، $c_6 = -\frac{3}{6}c_4 = \frac{3}{(2.4.6)}c_0$ ،

$c_7 = -\frac{4c_5}{7} = 0$ ، **... الخ.**

أي أنّ:

$$c_3 = c_5 = c_7 = \Lambda = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0$$

$$c_4 = -\frac{1}{2.4}c_0$$

$$c_6 = \frac{3}{(2.4.6)}c_0$$

عليه الحل هو:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + \Lambda$$

$$= c_0 + c_1\, x + \frac{1}{2}c_0 x^2 + 0\, x^3 - \frac{1}{2.4}c_0 x^4 + 0\, x^5 + \frac{3}{(2.4.6)}c_0 x^6 + 0x^7 + \Lambda$$

$$= c_0(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{(2.4)}x^4 + \frac{3}{(2.4.6)}x^6 \Lambda\,) + c_1 x$$

إذاً الحلان عند النقطة المنفردة $x_0 = 0$ هما، سلسلة القوى:

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{(2.4)}x^4 + \frac{3}{(2.4.6)}x^6 \Lambda$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1.3.5.\Lambda\ .(2n-3)}{2^n(n!)}\right)x^{2n} \quad ,|x| < 1$$

والحدودية:

$$y_2(x) = x$$

والحل العام هو:

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$$

الآن نعطي مثالاً نبين فيه أنّ العلاقة التكرارية تحتوي على ثلاثة حدود. سنحاول تناول المثال بطريقة مختصرة.

المثال (4): استخدم سلاسل القوى لحل المعادلة التفاضلية $y'' - (1+x)y = 0$ عند النقطة الاعتيادية $x_0 = 0$.

الحل: نظراً لعدم وجود نقطة منفردة للمعادلة التفاضلية، فإنّ المبرهنة (7.1) تضمن لنا وجود حلان مستقلان خطياً عند النقطة الاعتيادية $x_0 = 0$ من نمط سلاسل قوى متقارب على الفترة: $|x| < \infty$.

نفرض أنّ الحل: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ، بالاشتقاق مرتين والتعويض نحصل على:

$$y'' - (1+x)y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

وبالتبسيط، نحصل على:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

نلاحظ أنّ السلسلة الأولى من جهة اليسار تبدأ من x^0 والثانية تبدأ من x^1 في حين أنّ السلسلة الثالثة تبدأ من x^0. عليه نسحب حداً من كل من السلسلة الاولى والثالثة ، فنحصل على:

$$2c_2 - c_0 + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}}_{n-2=k} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}}_{n+1=k} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n}_{n=k} = 0$$

ومنها نجد:

$$2c_2 - c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k = 0$$

ومنها نجد العلاقة التكرارية:

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0, \quad c_{k+2} = \frac{c_k + c_{k-1}}{(k+1)(k+2)} \;, \; k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

نفرض أنّ $c_0 \neq 0$ ، $c_1 = 0$ أولاً ثم نجد الحل الأول ؛ ثم نفرض أنّ $c_0 = 0$ ، $c_1 \neq 0$ فنحصل على الحل الثاني. في كلتا الحالتين يكون: $c_2 = \frac{1}{2}c_0$

$c_1 = 0$ ، $c_0 \neq 0$	$c_1 \neq 0$ ، $c_0 = 0$
$c_2 = \frac{1}{2}c_0$	$c_2 = \frac{1}{2}c_0$
$c_3 = \frac{c_1 + c_0}{2.3} = \frac{c_0}{2.3} = \frac{c_0}{6}$	$c_3 = \frac{c_1 + c_0}{2.3} = \frac{c_1}{2.3} = \frac{c_1}{6}$
$c_4 = \frac{c_2 + c_1}{3.4} = \frac{c_0}{2.3.4} = \frac{c_0}{24}$	$c_4 = \frac{c_2 + c_1}{3.4} = \frac{c_1}{3.4} = \frac{c_1}{12}$
$c_5 = \frac{c_3 + c_2}{4.5} = \frac{c_0}{4.5}(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}) = \frac{c_0}{30}$	$c_5 = \frac{c_3 + c_2}{4.5} = \frac{c_1}{4.5.6} = \frac{c_1}{120}$

إذاً الحلان عند النقطة المنفردة $x_0 = 0$ هما، سلسلة القوى:

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \Lambda$$

$$y_2(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \Lambda$$

والحل العام هو:

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$$

الآن نعطي مثالاً فيه معاملات المعادلة التفاضلية ليست من نمط حدودية.

المثال (5): استخدم سلاسل القوى لحل المعادلة التفاضلية $y'' + (\cos x)y = 0$ عند النقطة الاعتيادية $x_0 = 0$.

الحل: نظراً لعدم وجود نقطة منفردة للمعادلة التفاضلية، فإنّ المبرهنة (7.1) تضمن لنا وجود حلين مستقلين خطياً عند النقطة الاعتيادية $x_0 = 0$ من نمط سلاسل قوى متقارب على الفترة: $|x| < \infty$.

نفرض أنّ الحل: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ، بالاشتقاق مرتين والتعويض واستخدام مفكوك سلسلة مكلورين للدالة $\cos x$، نحصل على:

$$y'' + (\cos x)y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \Lambda)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

وبالتبسيط، نحصل على:

$$2c_2+6c_3x+12c_4x^2+20c_5x^3+\Lambda+$$
$$(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\Lambda)(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\Lambda)=0$$

أي أنّ:

$$(2c_2-c_0)+(6c_3+c_1)x+(12c_4+c_2-\frac{c_0}{2})x^2+(20c_5+c_3-\frac{c_1}{2})x^3+\Lambda=0$$

ومنها نجد:

$$2c_2-c_0=0,\quad 6c_3+c_1=0,\quad 12c_4+c_2-\frac{c_0}{2}=0,\quad 20c_5+c_3-\frac{c_1}{2}=0,\ \Lambda$$

أي أن:

$$c_2=\frac{1}{2}-c_0,\qquad c_3=-\frac{1}{6}c_1,\qquad c_4=\frac{1}{12}c_0,\quad c_5=\frac{1}{30}c_1,\ \Lambda$$

إذاً الحلان عند النقطة الاعتيادية $x_0=0$ **هما، سلسلة القوى المتقاربة على الفترة:** $|x|<\infty$**، هما:**

$$y_1(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^4+\Lambda$$

$$y_2(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{30}x^5+\Lambda$$

والحل العام هو: $$y(x)=c_0y_1(x)+c_1y_2(x)$$

7.4 الحلول حول نقطة منفردة (Solutions about singular point)

بعد أن درسنا حل المعادلة التفاضلية حول النقطة الاعتيادية، سندرس في هذا البند حل المعادلة التفاضلية عند نقطة منفردة. نلاحظ في حالة النقطة المنفردة أنه قد لا نستطيع إيجاد حلين مستقلين خطيا من نمط سلاسل قوى، لكن بالتأكيد نضمن وجود حل واحد على الأقل، وفي هذه الحالة نجد الحل الثاني بطريقة اختزال الرتبة التي تعلمناها في الفصل الخامس، البند الأول.

سنبدأ بتمييز نوعين من النقاط المنفردة:

التعريف (7.2): النقاط المنفردة المنتظمة وغير المنتظمة

النقطة المنفردة x_0 **تسمى بـ "نقطة منفردة منتظمة" (Regular singular point) للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية:**

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (7.4)$$

التي تكافىء المعادلة :

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (7.5)$$

اذا كـان كـل مـن الدالـة: $p(x) = (x - x_0)P(x)$ والدالـة: $q(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$ تحليليـة عند النقطة x_0. إذا لم تكن النقطة المنفردة منتظمة تسمى "نقطة منفردة غير منتظمة".

المثال (1): جد النقاط المنفردة ونوعها للمعادلة التفاضلية: $xy'' + y' - y = 0$

الحل: نقسم طرفي المعادلة التفاضلية على x فنحصل على:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x}y = 0$$

النقطة $x = 0$ منفردة منتظمة لأنّ كلاً من الدالـة: $p(x) = (x - 0)P(x) = x(\frac{1}{x}) = 1$ **والدالـة:** $q(x) = (x - 0)^2 Q(x) = x^2(-\frac{1}{x}) = -x$ **تحليلية عند النقطة $x = 0$.**

المثال (2): جد النقاط المنفردة ونوعها للمعادلة التفاضلية:

$$(x^2 - 4)^2 y'' - 3(x - 2)y' + 2y = 0$$

الحل: نقسم طرفي المعادلة التفاضلية على $(x^2 - 4)^2 = (x - 2)^2(x + 2)^2$ فنحصل على:

$$y'' - \frac{3}{(x + 2)^2(x - 2)}y' + \frac{2}{(x - 2)^2(x + 2)^2}y = 0$$

بما أنّ : $P(x) = \dfrac{-3}{(x + 2)^2(x - 2)}$ **و** $Q(x) = \dfrac{2}{(x - 2)^2(x + 2)^2}$

فإنّ النقطتين: $x = 2$ منفردة منتظمة، في حين أن $x = -2$ منفردة غير منتظمة، لأنّ:

- **لفحص النقطة $x = 2$ منفردة منتظمة، تأمل كلاً من الدالتين:**

$$p(x) = (x - 2)P(x) = \frac{-3}{(x + 2)^2} \quad \text{و} \quad q(x) = (x - 2)^2 Q(x) = \frac{2}{(x + 2)^2}$$

هي تحليلية عند النقطة $x = 2$.

- لفحص النقطة $x=-2$ منفردة منتظمة، تأمل كل من الدالة:

$$p(x)=(x+2)P(x)=\frac{-3}{(x+2)(x-2)^2}$$

والدالة:

$$q(x)=(x+2)^2Q(x)=\frac{2}{(x-2)^2}$$

نجد أن $p(x)$ غير تحليلية عند النقطة $x=-2$.

المثال (3): تصنيف بعض النقاط المنفردة للمعادلات التفاضلية الآتية:

ت	المعادلة التفاضلية	النقاط المنفردة	نوعها
1	$xy''+y'-y=0$	$x=0$	منتظمة
2	$x^2y''+y'-xy=0$	$x=0$	غير منتظمة
3	$x(x+3)^2y''-y=0$	$x=0,3$	منتظمة
4	$x^2(x+3)^3y''-xy'+y=0$	$x=0$ $x=3$	منتظمة غير منتظمة
5	$x^2(x^2-1)^2y''-xy'+y=0$	$x=0$ $x=\pm1$	منتظمة غير منتظمة
6	$(x^2+x-6)^2y''-(x+3)y'+(x-2)y=0$	$x=2,-3$	منتظمة

لايجاد حل المعادلة التفاضلية باستخدام سلاسل القوى عند نقطة منفردة نستخدم "طريقة فروبنيس" (Frobenius method). سنبدأ بالمبرهنة الآتية بدون برهان:

المبرهنة (7.2) : مبرهنة فروبنيس

ليكن $x=x_0$ نقطة منفردة للمعادلة التفاضلية (7.4)، عندئذٍ يوجد حل واحد على الأقل من النمط:

$$y=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r} \qquad (7.8)$$

حيث إنّ r عدد حقيقي ثابت والمطلوب إيجاده. السلسلة (7.8) متقاربة على الأقل على الفترة:

$.0 < x - x_0 < R$

نلاحظ أنّ المبرهنة (7.2) تضمن لنا وجود حل واحد على الأقل من نمط سلاسل القوى كما ذكرنـا ذلك سابقاً في بداية البند. سنبدأ بالمثال الآتي:

المثال (4): استخدم سلاسل القوى لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$3xy'' + y' - y = 0$$

الحل: بما أنّ $x = 0$ **نقطة منفردة منتظمة، فعليه نفرض أنّ الحل:** $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ ، **بالاشتقاق نحصل على:**

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} \text{ ، } y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على:

$$3xy'' + y' - y = 3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

وبالتبسيط، نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

أي أنّ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

باخراج x^r **عامل مشترك وسحب الحد الأول من السلسلة الأولى من جهة اليسار، نحصل على:**

$$x^r\left[r(3r-2)c_0 x^{-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(3n+3r-2)c_n x^{n-1}}_{k=n-1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n}_{k=n}\right] = 0$$

أي أنّ:

$$x^r\left[r(3r-2)c_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k\right] = 0$$

وبضم السلسلتين بسلسلة منفردة نحصل على:

$$x^r\left[r(3r-2)c_0x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1}-c_k\right)x^k\right]=0$$

ومنها نحصل على:

$$(k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1}-c_k=0 \quad \text{و} \quad r(3r-2)c_0=0$$

أي أنّ:

$$c_{k+1}=\frac{c_k}{(k+r+1)(3k+3r+1)}, \quad k=0,1,2,\ldots \quad \text{و} \quad r_2=\frac{2}{3}, \quad r_1=0 \ \text{و}\ c_0\neq 0$$

وبالتعويض عن r_1 و r_2 بقيمتيهما نحصل على العلاقتين التكراريتين، ومنهما نحسب الثوابت في كلتا الحالتين، كما يأتي:

$c_0\neq 0$ و $r_2=\frac{2}{3}$	$c_0\neq 0$ و $r_1=0$
$c_{k+1}=\frac{c_k}{(3k+5)(k+1)}, \ k=0,1,2,\ldots$	$c_{k+1}=\frac{c_k}{(k+1)(3k+1)}, \ k=0,1,2,\ldots$
$c_1=\frac{c_0}{5.1}$	$c_1=\frac{c_0}{1.1}$
$c_2=\frac{c_1}{8.2}=\frac{c_0}{(2!)(5.8)}$	$c_2=\frac{c_1}{2.4}=\frac{c_0}{(2!)(1.4)}$
$c_3=\frac{c_2}{11.3}=\frac{c_0}{(3!)(5.8.11)}$	$c_3=\frac{c_2}{3.7}=\frac{c_0}{(3!)(1.4.7)}$
$c_4=\frac{c_3}{14.4}=\frac{c_0}{(4!)(5.8.11.14)}$	$c_4=\frac{c_3}{4.10}=\frac{c_0}{(4!)(1.4.7.10)}$
$\vdots$	$\vdots$
$c_n=\frac{c_0}{(n!)\left(5.8.11.\ldots(3n+2)\right)}$	$c_n=\frac{c_0}{(n!)\left(1.4.7.\ldots(3n-2)\right)}$

عليه فقد حصلنا على مجموعتين مختلفتين من الثوابت خلافاً لما هو عليه في حالة الحل عند النقطة المنفردة. وإنّ كل مجموعة تؤدي الى حل يختلف عن الآخر، وكلا الحلين من نوع سلاسل قوى وبدلالة الثابت c_0 ومستقلان خطياً . إذاً الحلان عند النقطة المنفردة $x_0=0$ هما:

$$y_1(x) = x^{\frac{2}{3}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)(5.8.11.\Lambda\ (3n+2))}x^n\right) \qquad \textbf{(}\mathit{7.9}\textbf{)}$$

$$y_2(x) = x^{0}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)(1.4.7.\Lambda\ (3n-2))}x^n\right) \qquad \textbf{(}\mathit{7.10}\textbf{)}$$

والحل العام هو:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

يمكن استخدام اختبار النسبة لاثبات أنّ السلسلتين (7.9) و (7.10) متقاربتان على الفترة: $|x| < \infty$**.**

الآن نعطي مثالاً نبين فيه أنّ فترة تقارب الحل الأول تختلف عن فترة تقارب الحل الثاني:

المثال (5): استخدم سلاسل القوى لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$2xy'' + (1+x)y' + y = 0$$

الحل: بما أنّ $x = 0$ **نقطة منفردة منتظمة، فعليه نستخدم طريقة فروبنيس لايجاد الحل. نفرض أنّ**

الحل: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ ، **بالاشتقاق نحصل على:**

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} \text{ ، } y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على:

$$2xy'' + (1+x)y' + y = 2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} +$$

$$(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

وبالتبسيط، نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

وبإضافة السلسلة الأولى من جهة اليسارالى السلسلة الثانية، وإضافة السلسلة الثالثة الى السلسلة الرابعة، نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)c_n x^{n+r} = 0$$

بإخراج x^r **عامل مشترك وسحب الحد الأول من السلسلة الأولى من جهة اليسار، نحصل على:**

$$x^r\left[r(2r-1)c_0x^{-1}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_nx^{n-1}}_{k=n-1}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)c_nx^n}_{k=n}\right]=0$$

وبالقسمة على x^r **، وضم السلسلتين، نصل الى:**

$$r(2r-1)c_0x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}[(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1}+(k+r+1)c_k]x^k=0$$

ومنها نحصل على:

$$(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1}+(k+r+1)c_k=0 \quad \text{و} \quad r(2r-1)c_0=0$$

وبالقسمة على $(k+r+1)$ **، نجد العلاقة التكرارية:**

$$c_{k+1}=\frac{-c_k}{(2k+2r+1)},\quad k=0,1,2,\ldots \quad \text{و} \quad r_2=\frac{1}{2},\quad r_1=0 \ \text{و}\ c_0\neq 0$$

وبالتعويض عن r_1 **و** r_2 **بقيمتيهما نحصل على العلاقتين التكراريتين المقابلة لكل منهما. ومنهما نحسب الثوابت في كلتا الحالتين، كما يأتي:**

$r_1=0$ و $c_0\neq 0$	$r_2=\frac{1}{2}$ و $c_0\neq 0$
$c_{k+1}=\frac{-c_k}{(2k+1)},\ k=0,1,2,\ldots$	$c_{k+1}=\frac{-c_k}{2(k+1)},\ k=0,1,2,\ldots$
$c_1=\frac{-c_0}{1}$	$c_1=\frac{-c_0}{2.1}$
$c_2=\frac{-c_1}{3}=\frac{c_0}{1.3}$	$c_2=\frac{-c_1}{2.2}=\frac{c_0}{(2^2)(2!)}$
$c_3=\frac{-c_2}{5}=\frac{-c_0}{1.3.5}$	$c_3=\frac{-c_2}{2.3}=\frac{-c_0}{(2^3)(3!)}$
$c_4=\frac{-c_3}{7}=\frac{c_0}{1.3.5.7}$	$c_4=\frac{-c_3}{2.4}=\frac{c_0}{(2^4)(4!)}$
$\vdots$	$\vdots$
$c_n=\frac{(-1)^nc_0}{1.3.5.7.\ldots.(2n-1)}$	$c_n=\frac{(-1)^nc_0}{(2^n)(n!)}$

إذاً الحلان عند النقطة المنفردة $x=0$ **هما:**

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0}{1.3.5.7.\Lambda\ .(2n-1)} x^n \quad , \qquad \textbf{(7.11)}$$

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0}{(2^n)(n!)} x^n \right) \qquad \textbf{(7.12)}$$

السلسلة (7.11) متقاربة على الفترة: $|x| < \infty$ ، في حين أنّ السلسلة (7.12) متقاربـة علـى الفتـرة:

$x \geq 0$ ، بسبب وجود $x^{\frac{1}{2}}$.

والحل العام على الفترة المشتركة بين الفترتين السابقتين وهي $(0, \infty)$، هو:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) .$$

الآن نعطي مثالاً نبين فيه وجود حل واحد من نوع سلاسل القوى:

المثال (6): استخدم سلاسل القوى لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الآتية: $xy'' + y = 0$

الحل: بما أنّ $x = 0$ نقطة منفردة منتظمة، فعليه نستخدم طريقة فروبنيس لايجاد الحل. نفرض أنّ الحل: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ ، بالاشتقاق نحصل على:

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} \ \text{،} \ y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على:

$$xy'' + y = x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

وبالتبسيط، نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

بإخراج x^r عامل مشترك وسحب الحد الأول من السلسلة الأولى من جهة اليسار، نحصل على:

$$x^r \left[r(r-1) c_0 x^{-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n-1}}_{k=n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{k=n} \right] = 0$$

وبالقسمة على x^r ، وضم السلسلتين، نصل الى:

$$r(r-1)c_0x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}[(k+r+1)(k+r)c_{k+1}+c_k]x^k=0$$

ومنها نحصل على:

$$(k+r+1)(k+r)c_{k+1}+c_k=0,\quad k=0,1,2\ldots \quad \text{و} \quad r(r-1)c_0=0$$

$$c_{k+1}=\frac{-c_k}{(k+r+1)(k+r)},\quad k=0,1,2,\ldots \quad \text{و} \quad r_2=1,\quad r_1=0 \text{ و } c_0\neq 0$$

وبالتعويض عن r_1 و r_2 بقيمتيهما نحصل على العلاقتين التكراريتين المقابلة لكل منهما. ومنهما نحسب الثوابت في كلتا الحالتين، كما يأتي:

$c_0\neq 0$ و $r_2=1$	$r_1=0$
$c_{k+1}=\dfrac{-c_k}{(k+1)(k+2)},\ k=0,1,2,\ldots$	$k(k+1)c_{k+1}=-c_k,\ k=0,1,2,\ldots$
$c_1=\dfrac{-c_0}{2.1}$	$c_0=0$ و $c_1\neq 0$
$c_2=\dfrac{-c_1}{2.3}=\dfrac{c_0}{(3!)(2!)}$	$c_2=\dfrac{-c_1}{2.1}$
$c_3=\dfrac{-c_2}{3.4}=\dfrac{-c_0}{(4!)(3!)}$	$c_3=\dfrac{-c_2}{3.2}=\dfrac{c_1}{(3!)(2!)}$
$c_4=\dfrac{-c_3}{4.5}=\dfrac{c_0}{(5!)(4!)}$	$c_4=\dfrac{-c_3}{4.3}=\dfrac{-c_1}{(4!)(3!)}$
$\vdots$	$\vdots$
$c_n=\dfrac{(-1)^n c_0}{(n+1)!(n!)},\ n=1,2,3,\ldots$	$c_n=\dfrac{(-1)^{n+1}c_1}{(n!)!(n-1)!}\ ,\mathrm{n}=2,3,\ldots$

عليه إذا كانت $r_1=0$ ، فإنّ الحل الأول هو:

$$y_1(x)=x^0\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

$$=x^0(0+c_1x-\frac{c_1}{(1!)(2!)}x^2+\frac{c_1}{(2!)(3!)}x^3-\frac{c_1}{(3!)(4!)}x^4+\ldots)$$

$$=c_1x(1-\frac{x}{(1!)(2!)}+\frac{x^2}{(2!)(3!)}-\frac{x^3}{(3!)(4!)}+\ldots)$$

إذاً الحل الأول هو:

$$y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)(n+1)!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)(n+1)!}x^{n+1} \qquad (7.13)$$

وإذا كانت $r_2 = 1$ **، فإنّ الحل الثاني هو:**

$$y_2(x) = x^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)(n+1)!}x^n = y_1(x) \qquad (7.14)$$

أي أنّ الحلين هما نفسهما. إذاً يوجد حل واحد من نوع سلاسل القوى للمعادلة التفاضلية عند النقطة المنفردة $x = 0$ **. لايجاد الحل الثاني سنميز ثلاث حالات كما يأتي.**

نفرض أنّ $x = 0$ **نقطة منفردة منتظمة للمعادلة التفاضلية (7.4) والجذرين المقابلين للنقطة المنفردة** r_1 **و** r_2 **حقيقيان. عند استخدام طريقة فروبنيس سنميز ثلاث حالات بالاعتماد على طبيعة الجذرين** r_1 **و** r_2 **. في الحالتين الأولى والثانية تكون** r_1 **هي الأكبر، أي أنّ:** $r_1 > r_2$ **وفي الحالة الثالثة تكون** $r_1 = r_2$ **.**

الحالة الأولى: إذا كانت r_1 **و** r_2 **مختلفتين وحاصل طرحهما** $(r_1 - r_2)$ **ليس عدداً صحيحاً موجباً، فعندئذٍ يوجد حلان مستقلان خطياً من نمط سلاسل القوى للمعادلة التفاضلية (7.4) من النمط:**

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \quad b_0 \neq 0 \quad ، \quad y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, \quad c_0 \neq 0$$

كما بينا ذلك في المثالين (4) و (5).

الحالة الثانية: إذا كانت r_1 **و** r_2 **مختلفتين وحاصل طرحهما** $(r_1 - r_2)$ **عدداً صحيحاً موجباً، فعندئذٍ يوجد حلان مستقلان خطياً من نمط سلاسل القوى للمعادلة التفاضلية (7.4) من النمط:**

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, \quad c_0 \neq 0 \quad , \qquad (7.15)$$

$$y_2(x) = C\, y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \quad b_0 \neq 0 \qquad (7.16)$$

حيث إنّ C **ثابت ويمكن أن يكون صفراً.**

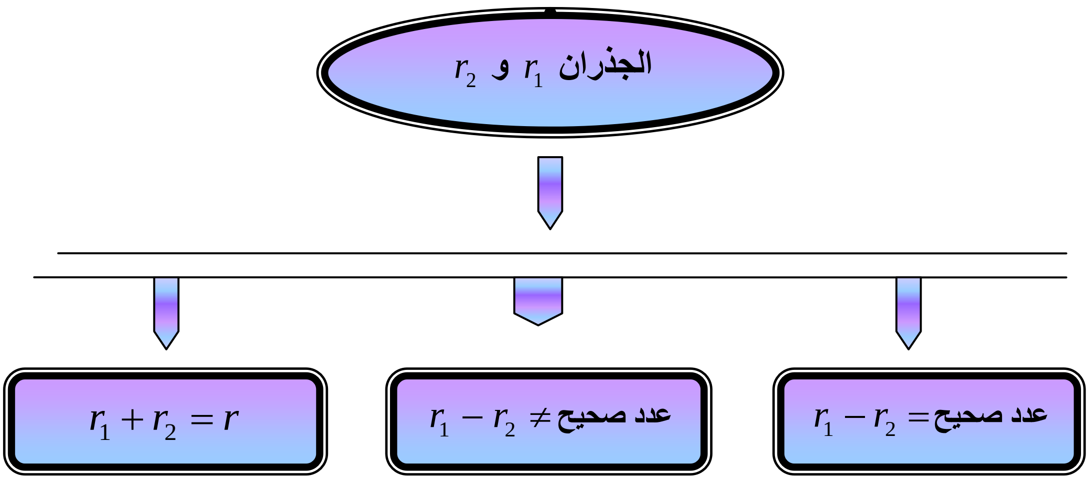
الحالة الثالثة: إذا كانت r_1 **و** r_2 **متساويتين، أي:** $r_1 = r_2 = r$ **. فعندئذٍ يوجد حلان مستقلان خطياً من نمط سلاسل القوى للمعادلة التفاضلية (*7.4*) من النمط:**

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}\ ,\quad c_0\neq 0 \qquad (7.17)$$

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^{n+r} \qquad (7.18)$$

ملاحظة: في الحالة الثانية يمكن للحل الثاني أن يحتوي على دالة لوغاريتمية، أما في الحالة الثالثة فإنّ الحل الثاني يجب أن يحتوي على دالة لوغاريتمية.

المخطط الانسيابي للحالات الثلاث



الآن نعود الى المثال (6) ونجد الحل الثاني. نتبع طريقة اختزال الرتبة باستخدام القانون الذي بموجبه نجد الحل الثاني إذا علم الحل الأول: في المثال (6): $P(x)=0$ والحل الأول هو:

$$y_1(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}-\frac{x^4}{144}+\Lambda$$

عليه حسب المعادلة (5.4):

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{dx}{[y_2(x)]^2}$$

$$=y_1(x)\int\frac{dx}{[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}-\frac{x^4}{144}+\Lambda\ ]^2}$$

$$= y_1(x)\int \frac{dx}{[x^2 - x^3 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{7}{12}x^5 + \Lambda\,]}$$

$$= y_1(x)\int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{7}{12} + \frac{19}{72}x + \Lambda\right)dx$$

$$= y_1(x)\left(\frac{-1}{x} + \ln x + \frac{7}{12}x + \frac{19}{144}x^2 + \Lambda\right)$$

$$= y_1(x)\ln x + y_1(x)\left(\frac{-1}{x} + \frac{7}{12}x + \frac{19}{144}x^2 + \Lambda\right)$$

إذاً الحل الثاني هو: $y_2(x) = y_1(x)\ln x + \left(-1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \Lambda\right)$

وهو شبيه بالمعادلة (7.16) باعتبار أنّ $C = 1$ ؛ والسلسلة داخل القوس تمثل السلسلة (7.18) باعتبار أنّ $r_2 = 0$. والحل العام للمعادلة التفاضلية على الفترة $(0,\infty)$ هو:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\,.$$

7.5 معادلتا بيسل وليجندر (Bessel's and Legendre's equations)

سنتناول في هذا البند معادلتين مهمتين جداً نسبة الى بيسل وليجندر وتستخدمان في التطبيقات الفيزيائية والهندسية والرياضيات المتقدمة. تسمى المعادلة التفاضلية:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \qquad (7.19)$$

بمعادلة بيسل، حيث إنّ $\nu \geq 0$.

ملاحظة: لقد تم حديثاً، تعميم معادلة بيسل (7.19) الى عائلة من معادلات تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية:

$$Ax^2 y'' + (Bx + C)y' + (Dx^2 + Ex + F)y = f(x)$$

التي من الواضح تصبح معادلة بيسل (7.19) عندما يكون:

$$A = B = D = 1, \quad C = E = 0, \quad F = -\nu^2, \quad f(x) = 0$$

تعد دراسة حلول الحالة العامة لمعادلة بيسل من الموضوعات المتقدمة في المعادلات التفاضلية ويشترك في حلها كل من المعادلات التفاضلية الاعتيادية والجزئية والكسرية، لذا نكتفي بالاشارة الى المصدر[8].

الآن، بمـا أنّ $x=0$ نقطـة منفـردة منتظمـة لمعادلـة بيسـل (7.19)، عليـه نفـرض الحـل هـو:

$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}$ **، بالاشتقاق نحصل على:**

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} \quad ، \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على:

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r}+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r+2}-\nu^2\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

وبالتبسيط، نحصل على:

$$c_0(r^2-r+r-\nu^2)x^r+x^r\sum_{n=1}^{\infty}c_n[(n+r)(n+r-1)+(n+r)-\nu^2]x^n$$
$$+x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+2}=0$$

باخراج x^r عامل مشترك والقسمه عليه، نحصل على:

$$c_0(r^2-\nu^2)+\sum_{n=1}^{\infty}c_n[(n+r)^2-\nu^2]x^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+2}=0. \qquad (7.20)$$

من المعادلة (7.20) نحصل على الجذرين: $r_1=\nu$ و $r_2=-\nu$.

عندما $r_1=\nu$ فإنّ المعادلة (7.20) تصبح:

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n n(n+2\nu)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+2}=0$$

وباخراج حد واحد من السلسلة الأولى من جهـة اليسـار وجمع السلسلتين النـاتجتين بسلسلة واحدة، نحصل على:

$$c_1(1+2\nu)x+\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}c_n n(n+2\nu)x^n}_{n=k+2}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+2}}_{n=k}=0$$

$$c_1(1+2\nu)x+\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+2+2\nu)c_{k+2}+c_k]x^{k+2}=0$$

ومنها نحصل على:

$$(k+2)(k+2+2\nu)c_{k+2}+c_k=0 \quad و \quad c_1(1+2\nu)=0$$

ومنها نجد العلاقة التكرارية:

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k+2)(k+2+2\nu)}, \quad k = 0, 1, 2, \Lambda \quad \text{و} \quad c_1(1+2\nu) = 0$$

نختار $c_1 = 0$ لأنّ $\nu \neq -\frac{1}{2}$ بالفرض هي موجبة. ومنه نجد: $c_1 = c_3 = c_5 = c_7 = \Lambda = 0$

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k+2)(k+2+2\nu)}, \quad k = 0,\ 2, 4, \Lambda$$

إذا فرضنا أنّ: $n = 1,2,3,\Lambda$, $k + 2 = 2n$ فعندئذٍ تصبح العلاقة التكرارية:

$$c_{2n} = \frac{-c_{2n-2}}{2^2 n(n+\nu)}, \quad n = 1,\ 2, ,3,4, \Lambda$$

ومنهما نجد قيمة الثوابت:

$$c_2 = \frac{-c_0}{2^2.1.(1+\nu)}$$

$$c_4 = \frac{-c_2}{2^2.2.(2+\nu)} = \frac{c_0}{2^4.1.2.(1+\nu)(2+\nu)}$$

$$c_6 = \frac{-c_4}{2^2.3.(3+\nu)} = \frac{-c_0}{2^6.1.2.3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}$$

$$\mathrm{M}$$

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n}.(n!)(1+\nu)(2+\nu)\Lambda\ (n+\nu)}, \quad n = 1,2,3,\Lambda \qquad (7.21)$$

لغرض التبسيط والحصول على صيغة عامة نفرض أنّ: $c_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}$

حيث إنّ $\Gamma(1+\nu)$ هي دالة جاما (Gamma function) المعروفة في الدوال الخاصة وهي تعميم لمفهوم المضروب $\nu!$ ، من أهم صفاتها:

$$\Gamma(1+\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(1+\nu+1) = (1+\nu)\Gamma(1+\nu)$$

$$\Gamma(1+\nu+2) = (2+\nu)\Gamma(2+\nu) = (2+\nu)(1+\nu)\Gamma(1+\nu)$$

باستخدام هذه المفاهيم، فإنّ المعادلة (7.21) تصبح:

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu}.(n!)(1+\nu)(2+\nu)\Lambda\ (n+\nu)\Gamma(1+\nu)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu}.(n!)\Gamma(1+\nu+n)} \qquad n = 0,1,2,3,\Lambda \qquad (7.22)$$

باستخدام **(7.22)**، واعتبار الجذر $r_1 = \nu$ ، نحصل على الحل الأول:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}\, x^{2n+\nu}$$

وإذا رمزنا لهذا الحل بالرمز $J_\nu(x)$ ، فيصبح:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{.(n!)\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \qquad (7.23)$$

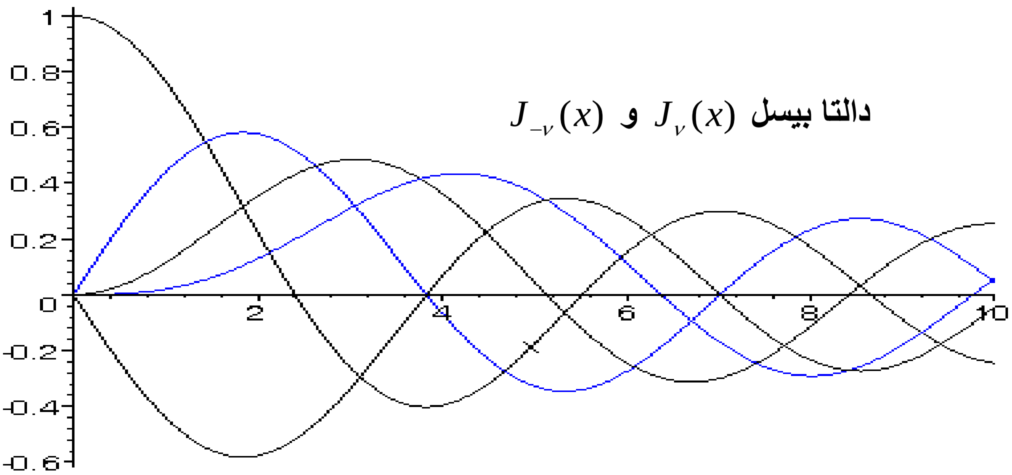
عندما $\nu \geq 0$ ، فإنّ السلسلة **(7.23)** متقاربة على الأقل على الفترة $[0,\infty)$.

وبالطريقة نفسها نجد الحل الثاني عندما $r_2 = -\nu$ ، وهو:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)\Gamma(1-\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu} \qquad (7.24)$$

السلسلة **(7.24)** متقاربة على الفترة: $(0,\infty)$، وقد استثنينا الصفر لأن الأس $(2n-\nu)$ يمكن أن يكون سالباً.

الدالتان $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ تسميان دالتي بيسل من النوع الأول ذي الرتبة ν و $-\nu$ على التوالي، كما هو موضح في الشكل **(7.2)**.



الشكل (7.2)

والحل العام على الفترة المشتركة بين الفترتين السابقتين وهي $(0,\infty)$، هو:

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1J_\nu(x)+c_2J_{-\nu}(x)$$

الآن نتناول معادلة ليجندر:

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \qquad (7.25)$$

حيث إنّ n عدد صحيح موجب. لاحظ أنّ $x=0$ نقطة اعتيادية لمعادلة ليجندر. عليه نفرض أنّ

الحل: $y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ ، **بالاشتقاق نحصل على:**

$$y''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2} \quad ، \qquad y'=\sum_{k=1}^{\infty}k\,c_kx^{k-1}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على:

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}$$
$$-2x\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}+n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0$$

وبالتبسيط، نحصل على:

$$[n(n+1)c_0+2c_2]+[(n-1)(n+2)c_1+6c_3]x+$$
$$\sum_{j=2}^{\infty}[(j+2)(j+1)c_{j+2}+(n-j)(n+j+1)c_j]x^j=0$$

ومنها نحصل على:

$$n(n+1)c_0+2c_2=0$$
$$(n-1)(n+2)c_1+6c_3=0$$
$$(j+2)(j+1)c_{j+2}+(n-j)(n+j+1)c_j=0$$

ومنها نجد العلاقة التكرارية:

$$c_2=-\frac{n(n+1)}{2!}c_0$$
$$c_3=-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}c_1$$
$$c_{j+2}=-\frac{(n-j)(n+j+1)}{(j+2)(j+1)}c_j \quad , \quad j=2,3,4,\Lambda \qquad (7.26)$$

التي منها نحصل على قيم الثوابت:

$$c_4=-\frac{(n-2)(n+3)}{4.3}c_2=\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}c_0$$

$$c_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{5.4}c_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}c_1$$

$$c_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{6.5}c_4 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}c_0$$

$$c_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{7.6}c_5 = -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{6!}c_1$$

عليه حصلنا على حلين مستقلين خطياً من نوع سلاسل قوى متقاربة على الفترة: $|x|<1$ هما:

$$y_1(x) = c_0[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4$$
$$- \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \Lambda\ ],$$

$$y_2(x) = c_1[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5$$
$$- \frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{6!}x^7 + \Lambda\ ].$$

ملاحظات:

1. إذا كانت n عدداً صحيحاً زوجياً ، فإنّ السلسلة الأولى تنتهي في حين أنّ السلسلة الثانية تبقى غير منتهية. على سبيل المثال: عندما تكون $n=4$ ، فإنّ :

$$y_1(x) = c_0(1 - \frac{4.5}{2!}x^2 + \frac{2.4.5.7}{4!}x^4) = c_0(1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4)$$

2. أيضاً إذا كانت n عدادً صحيحاً فردياً، فإنّ السلسلة الثانية تنتهي عند x^n في حين أنّ السلسلة الأولى تبقى غير منتهية. على سبيل المثال: عندما تكون $n=3$ ، فإنّ :

$$.\ y_2(x) = c_1(x - \frac{2.5}{3!}x^3) = c_1(x - \frac{5}{3}x^3)$$

3. عند اختيار قيم معينة للثوابت: c_0 ، c_1 ، ... ، c_n نحصل على حلول لمعادلة ليجندر ذات صيغ أفضل من السابق؛ على سبيل المثال:

عندما $n=0$ **نختار** $c_0=1$

وعندما $n=2,4,6,\Lambda$ **نختار** $c_0 = (-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1.3....(n-1)}{2.4....n}\right)$

في حين عندما $n=1$ **نختار** $c_1=1$

وعندما $n=3,5,7,\Lambda$ نختار $c_1=(-1)^{\frac{(n-1)}{2}}\left(\frac{1.3....n}{2.4.....(-1)}\right)$.

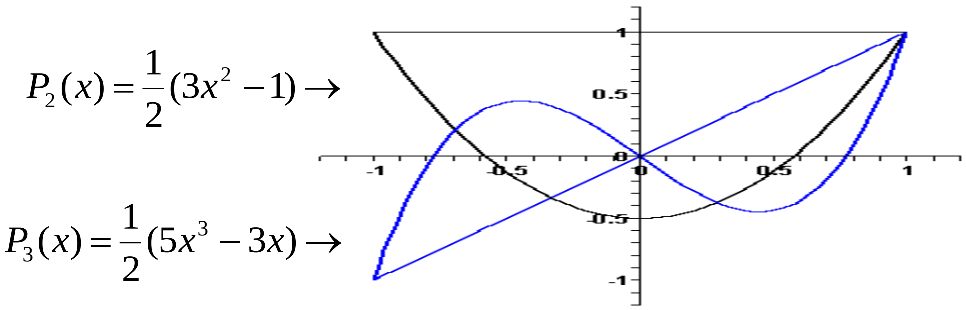
على سبيل المثال، عندما $n=4$ ، نحصل على:

$$y_1(x)=(-1)^{\frac{4}{2}}\frac{1.3}{2.4}(1-10x^2+\frac{35}{3}x^4)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \; .$$

تدعى هذه الحلول الخاصة بـ " حدوديات ليجندر" (Legendre polynomials) والتـي سنرمز لها بالرمز $P_n(x)$. من السلسلتين $y_1(x)$ و $y_2(x)$ وحسب الاختيـارات السابقة لكل من c_0 و c_1، يمكن ايجاد حدوديات ليجندر والمعادلة التفاضلية المقابلة لها كما في الجدول الآتي:

n	(الحل الخاص) $P_n(x)$	المعادلة التفاضلية
0	$P_0(x)=1$	$(1-x^2)y''-2xy'=0$
1	$P_1(x)=x$	$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$
2	$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$
3	$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$	$(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$
4	$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$	$(1-x^2)y''-2xy'+20y=0$
5	$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$	$(1-x^2)y''-2xy'+30y=0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

الشكل (7.3) يبين رسم الحدوديات الأربعة الأولى على الفترة: $-1\le x\le 1$



الشكل (7.3)

من أهم خصائص حدوديات ليجندر الآتي:

$$P_n(-1)=(-1)^n \quad ، \quad P_n(1)=1 \quad ، \quad P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$$

$$P_n'(0)=0, \quad n=0,2,4,\Lambda \quad ، \quad P_n(0)=0, \quad n=1,3,5,\Lambda$$

الخاصية الأولى تعني أنّ حدودية ليجندر $P_n(x)$ هي دالة فردية (Odd function) عندما n عدد فردي ودالة زوجية (Even function) عندما n عدد زوجي.

7.6 المخرجات التعليمية للفصل (Learning 0utcomes)

بعد الانتهاء من دراسة الفصل يكون الطالب قد أتقن المخرجات التعليمية الآتية:

1. التعرف على العلماء الرياضيين الذين ساهموا في تطوير طريقة سلاسل القوى.
2. مراجعة شاملة لسلاسل القوى والعمليات الجبرية عليها ومعرفة منطقة تقاربها.
3. مراجعة سريعة لسلاسل تايلور ومكلورين ومعرفة مناطق تقاربهما.
4. التمييز بين المسائل التي يمكن حلها بالطرق القياسية المباشرة والتي يستخدم فيها الحل بسلاسل القوى.
5. استخدام سلاسل القوى لحل معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى والثانية لا يمكن حلها بالطرائق القياسية المباشرة.
6. التمييز بين النقاط الاعتيادية والمنفردة، وبين النقاط المنفردة المنتظمة وغير المنتظمة.
7. التعرف على مبرهنة وجود حلول سلاسل القوى وتطبيقاتها.
8. استخدام طريقة فروبنيس لإيجاد حلول معادلات تفاضلية عند نقطة منفردة منتظمة.
9. حساب العلاقة التكرارية عند استخدام طريقة فروبنيس.
10. التعرف على معادلة بيسل وطريقة حلها، وتمثيل الحل بالرسم.
11. التعرف على معادلة ليجندر وطريقة حلها.
12. حساب حدودية ليجندر ورسمها.
13. المقدرة على استخدام القرص الممغنط المرافق للكتاب لمراجعة محتويات الكتاب.

تمارين الفصل السابع

حدد الثوابت $c_k \ (k = 0, 1, 2, ..., n, ...)$ و a لسلاسل القوى من 1- 5 ، ثم جد فترة تقارب سلاسل القوى الآتية :

.1 $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, 2^k x^k$ **.2** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ **.3** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3}$ **.4** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$

.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n} (x-5)^n$

أعد كتابة السلاسل من 6- 9 بحيث يكون الحد العام x^k :

.6 $\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^{n+2}$ **.7** $\sum_{n=3}^{\infty} (2n-1) c_n x^{n-3}$ **.8** $\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\, c_{n-1} x^{n-2}$

.9 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, c_n x^{n+1}$

حور السلاسل من 10- 11 ثم أجرِ العمليات الحسابية المطلوبة وضع الناتج بصورة سلسلة منفردة:

.10 $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n$

.11 $\sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6 c_n x^{n+1}$

اختبر تقارب سلاسل القوى من 12- 15 ثم جد فترات التقارب :

.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n n}$ **.13** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n n}$

.14 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ **.15** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$

جد النقاط الاعتيادية والمنفردة (إن وجدت) للمعادلات التفاضلية في 16- 20 :

.16 $y'' - xy = 0$ **.17** $y'' + xy' - y = 0$

.18 $x^2y''+xy'-y=0$ **.19** $(x+1)y''-xy'-y=0$

.20 $(x^2+1)y''-2xy'+y=0$

استخدم سلاسل القوى لحل المعادلة التفاضلية في 21- 30 عند النقطة الاعتيادية $x_0=0$ **.**

.21 $y''-xy=0$ **.22** $y''+x^2y=0$

.23 $y''-2xy'+y=0$ **.24** $y''-xy'+2y=0$

.25 $y''+x^2y'+xy=0$ **.26** $(x+2)y''+xy'-y=0$

.27 $(x-1)y''+y'=0$ **.28** $(x^2+1)y''-6y=0$

.29 $(x+2)y''+xy'-y=0$ **.30** $(x^2+2)y''+3xy'-y=0$

صنف النقاط المنفردة للمعادلات التفاضلية من 31- 40 :

.31 $5xy''+2y'-xy=0$

.32 $x^2y''-4y'-3xy=0$

.33 $x^2(x-2)y''-y=0$

.34 $x^3(x^2-1)^2y''+4xy'-3y=0$

.35 $x^2(x-1)^3y''-xy'+y=0$

.36 $x^2(x^2-25)^2y''+4xy'+(x^2-25)y=0$

.37 $(x^2+x-2)^2y''-(x+2)y'+(x-1)y=0$

.38 $y''-\dfrac{1}{x}y'+\dfrac{1}{(x-1)^3}y=0$

.39 $(x^3+4x)y''-2xy'+6y=0$

.40 $(x^3-2x^2+3x)^2y''+x(x-3)^2y'-(x+1)y=0$

استخدم طريقة فروبنيس لحل المعادلات التفاضلية من 41- 50 عند النقطة المنفردة المنتظمة $x=0$ **:**

.41 $2xy''-y'+2y=0$

.42 $2xy'' + 5y' + xy = 0$

.43 $4xy'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$

.44 $2x^2y'' - xy' + (x^2 + 1)y = 0$

.45 $3xy'' + (2 - x)y' - y = 0$

.46 $x^2y'' - (x - \frac{2}{9})y = 0$

.47 $2xy'' - (3 + 2x)y' + y = 0$

.48 $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{4}{9})y = 0$

.49 $9x^2y'' + 9x^2y' + 2y = 0$

.50 $2x^2y'' + 3xy' + (2x - 1)y = 0$

.51 **برهن أنّ معادلة ليجندر تكافىء:**

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0$$

.52 **برهن أن التعويض:** $x = \cos\theta$ **يحول المعادلة التفاضلية الآتية الى معادلة ليجندر:**

$$\sin\theta\frac{d^2y}{d\theta^2} + \cos\theta\frac{dy}{d\theta} + n(n+1)(\sin\theta)y = 0$$

.53 **برهن أنّ حدودية ليجندر تكافىء:**

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} \; x^{n-2k}$$

حيث $[\frac{n}{2}]$ **ترمز للصحيح الأعظم أقل من ويساوي** $\frac{n}{2}$ **.**