الفصل الثامن

تحويلات لابلاس للمعادلات التفاضلية الخطية

Laplace tansforms for linear differential equations

يتناول هذا الفصل حل المعادلات التفاضلية باستخدام تحويل لابلاس. يعود الفضل في تطوير هذه الطريقة الى:

- الفرنسي بير- سايمون لابلاس (Pierre-Simon Laplace) الرياضي والفلكي الذي عاش خلال الفترة (1749-1827م). اشتهر بالاضافة الى المعادلات التفاضلية بأعماله في المعادلات التكاملية وعلم الحركة (الميكانيك) والفلك والاحتمالات، وله معادلة تفاضلية جزئية منسوبة اليه تدعى معادلة لابلاس. استطاع لابلاس وضع المعالم النهائية لعلم الفلك الرياضي من خلال تلخيص الاعمال التي أنجزها من سبقوه

في هذا المجال وتعميمها. ألف موسوعة من خمسة أجزاء سماها علم الحركة السماوية (Celestial mechanics) ، أعاد في هذا العمل الجوهري صياغة علم الحركة باستخدام التفاضل والتكامل بدلاً عن الطرائق الهندسية الكلاسيكية التي استخدمها إسحاق نيوتن.

- البريطاني ديراك (Dirac) خلال الفترة (1902 – 1984م) الحاصل على جائزة نوبل عام 1933م لاكتشافاته العظيمة في فيزياء الكم.

تناولنا في الفصول السابقة طرائق حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

و بينا أنّ الحل العام يتكون من مجموع دالتين $y=y_c+y_p$ حيث الدالة y_c هي الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المقابلة لها و تسمى بالدالة المكملة، إما الدالة y_p فهي عبارة عن حل خاص للمعادلة، راجع التعريف (4.5) والمعادلة (4.19).

لقد شملت الطرائق التي تناولناها سابقا حل المعادلات ذات المعاملات الثابتة و حالة خاصة من المعادلات بمعاملات متغيرة عندما تكون المعادلة من نوع كوشي أويلر. و في حالات أخرى رأينا إمكانية الحصول على الحلول باستخدام سلاسل القوى. في جميع هذه الحالات اقتصرت الدالة $g(x)$ على أنها ملساء (Smooth) ، أي انها قابلة للاشتقاق المتصل على فترة الحل. أما في حالة كون الدالة $g(x)$ غير ملساء على فترة الحل، أي عندما تكون غير قابلة للاشتقاق أو غير متصلة عند

عدد منته من نقاط الفترة، كما هي الحال عندما تكون الدالة درجية (Step function) ، فإنّ استخدام طريقة تغييرالمعلمات على العموم تكون صعبة.

في هذا الفصل سنناقش أسلوبا مختلفا عما سبق لحل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة، وحل مسائل القيم الابتدائية المقابلة لها:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \qquad \textbf{(8.1)}$$

بغض النظر عن كون الدالة $g(x)$ ملساء أوغيرملساء و ذلك بتحويل المعادلة التفاضلية الى معادلة جبرية باستخدام تحويلات لابلاس.

سنبدا بإعطاء تعريف لابلاس مع الأمثلة.

8.1 تحويل لابلاس (Laplace transform)

لقد تعرف الطالب سابقا على بعض التحويلات المطبقة على الدوال، مثل التفاضل و التكامل. فعملية التكامل على سبيل المثال تحول الدالة $f(t)$ المتصلة على فترة I تحوي العدد a الى الدالة: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ وكذلك عملية الاشتقاق فهي تحول الدالة $f(t)$ المتصلة على فترة I الى الدالة: $g(x) = f'(x)$.

سنتاول في هذا البند عملية أخرى على الدوال و هي تحويل لابلاس وسنناقش بعض صفاته المهمة وكذلك سنتعرف على تحويل لابلاس العكسي.

التعريف (8.1) : (تحويل لابلاس)

لتكن $f(t)$ دالة معرفة على الفترة $[0,\infty)$. فإنّ تحويل لابلاس هو دالة بالمتغير s تعرف كما يلي:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad \textbf{(8.2)}$$

بشرط تقارب التكامل المعتل.

المثال (1): جد $L\{f(t)\}$ حيث $f(t)=1,\ t \ge 0$

الحل: باستخدام المعادلة (8.2) نحصل على

$$F(s) = L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{q\to\infty} \int_0^q e^{-st}dt = \lim_{q\to\infty} \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^q = \lim_{q\to\infty} \frac{1-e^{-sq}}{s}$$

فتكون الغاية موجودة عندما $s>0$ ، حيث تؤول $e^{-sq}\to 0$ عندما $q\to\infty$. وبخلاف ذلك تكون الغاية غير موجودة. وعليه نحصل على دالة التحويل

$$F(s)=L\{1\}=\frac{1}{s}\ \ ,\ \ s>0$$

المثال (2): جد $L\{f(t)\}$ حيث $f(t)=t,\ \ t\ge 0$

الحل: باستخدام المعادلة (8.2) مع التكامل بالأجزاء نحصل على

$$F(s)=L\{t\}=\int_0^\infty te^{-st}dt=\lim_{q\to\infty}\int_0^q te^{-st}dt=\lim_{q\to\infty}\ \left.\frac{-te^{-st}}{s}\right]_{t=0}^{q}+\lim_{q\to\infty}\ \frac{1}{s}\int_0^q e^{-st}dt$$

$$=\lim_{q\to\infty}\ \frac{-qe^{-sq}}{s}+\lim_{q\to\infty}\ \frac{1-e^{-sq}}{s^2}$$

فإذا كانت $s>0$ فإنّ $e^{-sq}\to 0$ عندما $q\to\infty$ وعليه يكون

$$F(s)=L\{t\}=\frac{1}{s^2}\ \ ,\ \ s>0$$

المثال (3): جد $L\{f(t)\}$ حيث $f(t)=e^{2t},\ \ t\ge 0$

الحل: باستخدام المعادلة (8.2) نحصل على

$$F(s)=L\{e^{2t}\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{2t}dt=\lim_{q\to\infty}\int_0^q e^{(2-s)t}dt$$

$$=\lim_{q\to\infty}\ \left.\frac{e^{(2-s)t}}{2-s}\right]_{t=0}^{q}=\lim_{q\to\infty}\ \frac{e^{(2-s)q}-1}{2-s}$$

فأذا كانت $s>2$ فإنّ $e^{(2-s)q}\to 0$ عندما $q\to\infty$ وبذلك يكون

$$F(s)=L\{e^{2t}\}=\frac{1}{s-2}\ \ ,\ \ s>2$$

المثال (4): جد $L\{f(t)\}$ حيث $f(t)=\sin t,\ \ t\ge 0$

الحل: باستخدام المعادلة (8.2) والتكامل بالأجزاء مرتين نحصل على

$$F(s)=L\{\sin t\}=\int_0^\infty e^{-st}\sin t\ dt=\lim_{q\to\infty}\left.\frac{-e^{-st}}{s^2+1}(s\sin t+\cos t)\right]_{t=0}^{q}$$

$$=\lim_{q\to\infty}\left[\frac{-e^{-sq}}{s^2+1}(s\sin q+\cos q)+\frac{1}{s^2+1}\right]$$

فإذا كانت $s>0$ **فإنّ** $\frac{-e^{-sq}}{s^2+1}(s\sin q+\cos q)\to 0$ **عندما** $q\to\infty$ **(باستطاعة الطالب التحقق من ذلك باستخدام تقنيات النهايات وخصائص الدوال المثلثية). وبذلك يكون:**

$$F(s)=L\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}\quad ,\quad s>0$$

المثال (5): جد $L\{f(t)\}$ **حيث** $f(t)=\begin{cases}-1\ ,\ 0\le t<1\\ \ \ 1\ \ ,\ \ t\ge 1\end{cases}$

الحل: باستخدام المعادلة (8.2) وتجزئة التكامل نحصل على:

$$F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\ dt=\int_0^1 -e^{-st}dt+\int_1^\infty e^{-st}dt$$

$$=\left.\frac{-e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{1}+\lim_{q\to\infty}\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=1}^{q}$$

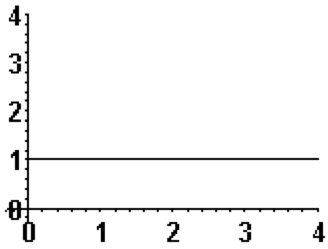
$$=\frac{e^{-s}-1}{s}+\lim_{q\to\infty}\frac{e^{-sq}-e^{-s}}{-s}$$

فإذا كانت $s>0$ **فإنّ** $e^{-sq}\to 0$ **عندما** $q\to\infty$ **وبذلك يكون**

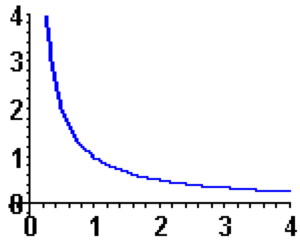
$$F(s)=L\{f(t)\}=\frac{2e^{-s}-1}{s}\quad ,\quad s>0$$

للتعرف على سمات تحويلات لابلاس في الامثلة السابقة أنظر في الشكل (8.1) حيث يحوي الرسوم البيانية للدوال $f(t)$ **مع تحويلات لابلاس** $F(s)$ **للأمثلة من (1 – 5). ماذا يلاحظ الطالب في طبيعة الأشكال؟ هل هناك صفات مشتركة بين تحويلات لابلاس للدوال المختلفة؟ الصفة العامة الواضحة التي تشترك بها تحويلات لابلاس هي كونها ملساء، أي أنها قابلة للاشتقاق المتصل على فترات تعريفها. أما الصفة المشتركة الأخرى فهي كون دوال التحويل** $F(s)\to 0$ **عندما** $s\to\infty$**، كما سنبرهن ذلك لاحقا.**

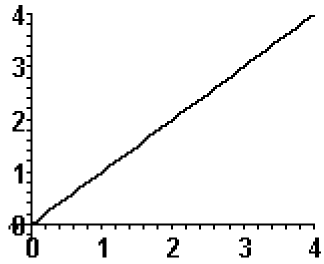
$f(t)=1$



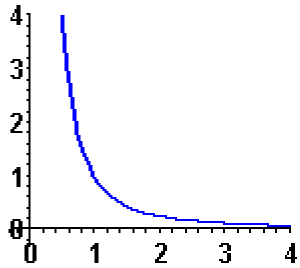
$F(s)=\frac{1}{s}$



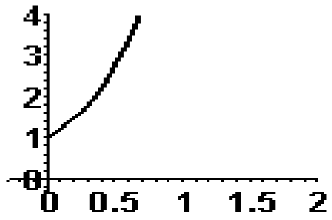
$f(t)=t$



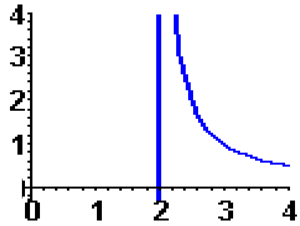
$F(s)=\frac{1}{s^2}$



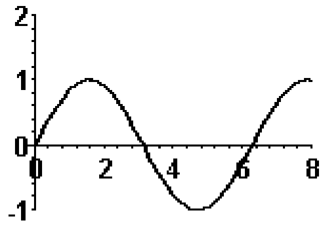
$f(t)=e^{2t}$



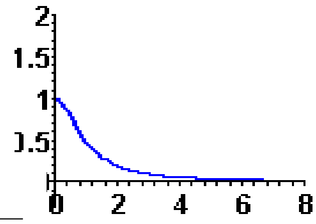
$F(s)=\frac{1}{s-2}$

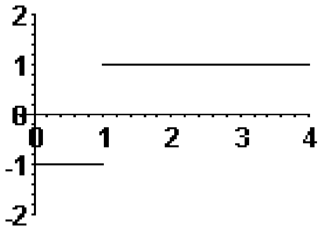


$f(t)=\sin t$

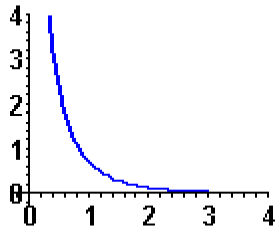


$F(s)=\frac{1}{s^2+1}$





$$f(t)=\begin{cases}-1, & 0\le t<1\\ 1 & 1\le t<\infty\end{cases}$$



$$F(s)=\frac{2e^{-s}-1}{s}$$

الشكل (8.1)

قبل الخوض بتفاصيل أكثرعن تحويلات لابلاس والتعرف على أساليب أخرى غير استخدام التعريف المباشرلإيجادها علينا الأجابة عما يلي: هل تحويل لابلاس موجود لأي دالة $f(t)$ أم أن هناك بعض الشروط اللازمة لضمان وجود دالة التحويل $F(s)$ ؟ بالرجوع الى تعريف لابلاس (8.1) يتضح اقتران وجود التحويل $L\{f(t)\}$ بتقارب التكامل المعتل $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. و لتحديد مواصفات الدوال $f(t)$ التي تضمن تقارب التكامل سنذكر بعض التعاريف و المبرهنات لتسهيل ذلك.

التعريف (8.2): رتبة أسية (Exponential order)

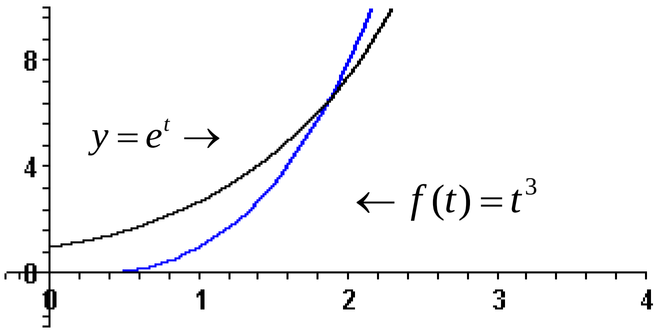
يقال للدالة $f(t)$ بأنها ذات رتبة أسية b إذا وجدت أعداد ثابتة b و $0<C$ و $0<T$ بحيث: $|f(t)| \le Ce^{bt}$ للقيم $T<t$.

المثال (6): بين بأنّ الدالة $f(t)=t^3$ ذات رتبة أسية $b=1$.

الحل: باستخدام التعريف (8.2) علينا إثبات $|f(t)| \le Ce^{t}$ للقيم $T<t$ حيث C و T ثوابت علينا إيجادها بتطبيق قاعدة لوبيتال نجد أن:

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{f(t)}{e^t}\right| = \lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^t} = \lim_{t\to\infty}\frac{3!}{e^t} = 0$$

أي أن $|f(t)| < e^t$ عندما تكون قيم t كبيرة. و بملاحظة الشكل (8.2) نستطيع اختيار $T=5$ و $C=1$ فتكون $|f(t)| \le e^t$ للقيم $5<t$.



الشكل (8.2)

المبرهنة الآتية تسهل علينا التحقق من كون الدالة $f(t)$ ذات رتبة أسية أم لا.

المبرهنة(8.1) : (مبرهنة الرتبة الأسية)

إذا كانت الغاية $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-bt} f(t)$ **موجودة و مقيدة فإنّ** $f(t)$ **ذات رتبة أسية** b**. و إذا كانت الغايـة غير مقيدة لكل** $0<b$ **فإنّ** $f(t)$ **ليست ذات رتبة أسية.**

البرهان: يترك للطالب استنتاجه من التعريف (8.2).

المثال (7): بين فيما إذا كانت الدوال الآتية ذات رتبة أسية أم لا.

أ- $f(t)=e^{3t}$ ، **ب-** $f(t)=\sin t$ ، **ج-** $f(t)=e^{t^2}$

الحل: باستخدام المبرهنة (8.1) نرى أنّ

أ- $$\lim_{t\to\infty} e^{-bt} f(t)=\lim_{t\to\infty} e^{-bt}e^{3t}=\lim_{t\to\infty} e^{(3-b)t}$$

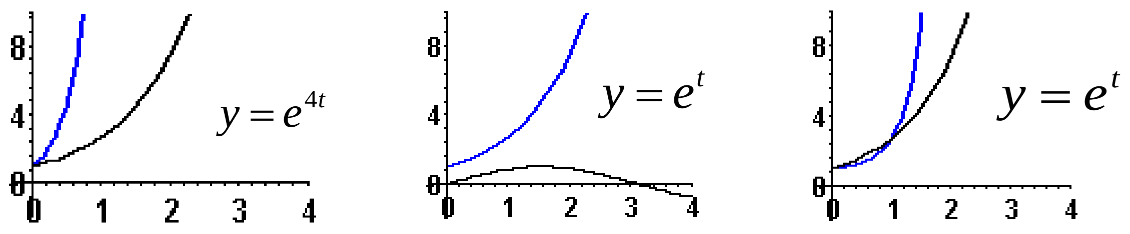
فإذا كانت قيمة $3\le b$ **فإنّ الغاية موجودة ومقيدة. وعليه تكون الدالة ذات رتبة أسية لهذه القيم .**

ب- $$\lim_{t\to\infty} e^{-bt} f(t)=\lim_{t\to\infty} e^{-bt}\sin t=\lim_{t\to\infty} \frac{\sin t}{e^{bt}}$$

فإذا كانت قيمة $0<b$ **فإنّ الغاية تساوي 0 . وعليه تكون الدالة ذات رتبة أسية لهذه القيم .**

ج- $$\lim_{t\to\infty} e^{-bt} f(t)=\lim_{t\to\infty} e^{-bt}e^{t^2}=\lim_{t\to\infty} e^{(t-b)t}$$

نلاحظ في هذه الحالة أن $(t-b)t\to\infty$ **عندما** $t\to\infty$ **لأية قيمة** $0<b$ **و بذلك تكون الغاية غيرمقيدة. وعليه لا تكون الدالة ذات رتبة أسية. الشكل (8.3) يوضح ما ورد في المثال أعلاه.**



$f(t)=e^{3t}$ $\qquad$ $f(t)=\sin t$ $\qquad$ $f(t)=e^{t^2}$

الشكل (8.3)

التعريف (8.3): الاتصال المتقطع (Piecewise continuity)

يقال أنّ الدالة $f(t)$ ذات اتصال متقطع على الفترة المغلقة $I=[a,b]$ إذا كانت معرفة على الفترة I وبحيث يمكن تقسيمها الى عدد منتهٍ من الفترات الجزئية تكون الدالة متصلة على كل منها ولها غاية مقيدة عند نقاط نهايتها. أي أنّ الدالة $f(t)$ متصلة على الفترة I باستثناء عدد منتهٍ من نقاط عدم الاتصال التي تمثل نهايات الفترات الجزئية حيث تكون للدالة نهايات من اليمين أو اليسار مقيدة عندها.

و تكون الدالة $f(t)$ ذات اتصال متقطع على الفترة $[a,\infty)$ إذا كانت ذات اتصال متقطع على الفترة $[a,N]$ لكل $a<N$.

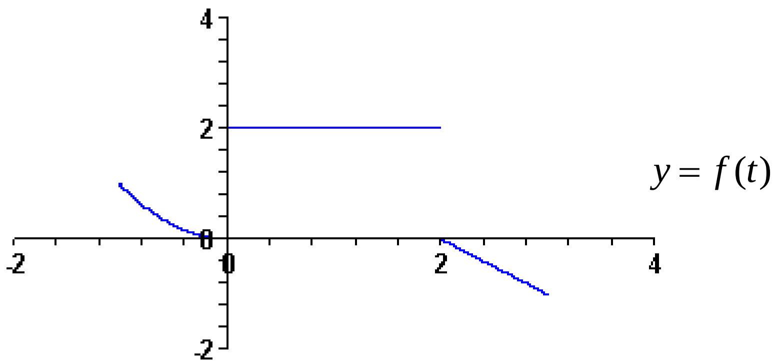
المثال (8): بين فيما إذا كانت الدالة
$$f(t)=\begin{cases} t^2 & , -1\le t<0 \\ 1 & , 0\le t<2 \\ 2-t & , 2\le t\le 3 \end{cases}$$
ذات اتصال متقطع على الفترة $[-1,3]$.

الحل: بما أن الدالة $f(t)$ مكونة من ثلاث قطع تمثل حدوديات بدرجات مختلفة فإنّها متصلة على الفترات $[-1,0),\ [0,2),\ [2,3]$. بقي علينا إختبار الغاية من اليسارعند النقطتين $t=0$ و $t=2$.

و حيث إنّ

$$\lim_{t\to 0^-} f(t)=\lim_{t\to 0^-} t^2=0\ ,\ \lim_{t\to 2^-} f(t)=\lim_{t\to 2^-} 1=1$$

فإنّهما مقيدتان وبالتالي فإنّ الدالة ذات اتصال متقطع على الفترة $[-1,3]$. الشكل (8.4) يوضح ذلك:



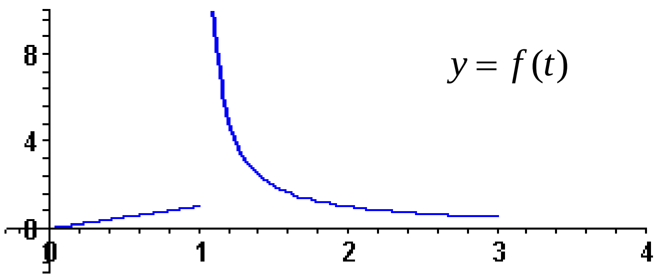
الشكل (8.4)

المثال (9): بين فيما إذا كانت الدالة $f(t)=\begin{cases} t & , \ 0\le t\le 1 \\ \dfrac{1}{t-1} & , \ 1<t\le 3 \end{cases}$ **ذات اتصال متقطع على الفترة** $[0,3]$.

الحل: بما أن غاية الدالة $f(t)$ **عند النقطة** $t=1$ **من اليمين هي**

$$\lim_{t\to 1^+} f(t)=\lim_{t\to 1^+}\frac{1}{t-1}=\infty$$

فإنّ الدالة ليست ذات اتصال متقطع على الفترة $[0,3]$**. الشكل (8.5) يوضح ذلك.**



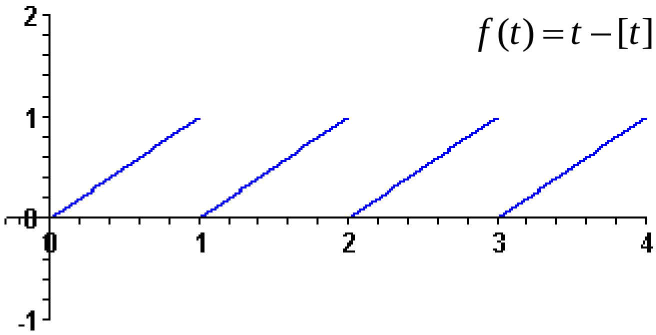
الشكل (8.5)

المثال (10): بين فيما إذا كانت الدالة $f(t)=t-[t]$ **ذات اتصال متقطع على الفترة** $[0,\infty]$.

الحل: باستخدام تعريف دالة الصحيح الأعظم (Greatest integer function) وإجراء التبسيط على $t-[t]$ **تصبح الدالة:**

$$f(t)=\begin{cases} t-0 \ , & 0\le t<1 \\ t-1 \ , & 1\le t<2 \\ t-2 \ , & 2\le t<3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

بما أن الدالة $f(t)$ **مكونة من قطع حدوديات من الدرجة الأولى فإنّها متصلة على الفترات** $[0,1),\ [1,2),\ [2,3),\ \ldots$ **كما أن الغايات من اليسارعند النقاط** $t=1,\ t=2,\ t=3,\ \ldots$ **موجودة و مقيدة. بذلك تكون** $f(t)$ **ذات اتصال متقطع على الفترة** $[0,N]$ **لكل عدد صحيح** $0<N$ **. و عليه تكون الدالة ذات اتصال متقطع على الفترة** $[0,\infty)$**. الشكل (8.6) يوضح ذلك.**



الشكل (8.6)

المبرهنة (8.2) : (وجود تحويل لابلاس)

لتكن $f(t)$ دالة ذات اتصال متقطع على الفترة $[0,\infty)$ و ذات رتبة أسية b للقيم $T<t$. فإنّ $F(s)=L\{f(t)\}$ تكون موجودة ومعرفة للقيم $b<s$.

البرهان: بما أن

$$F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\ dt=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt=I_1+I_2$$

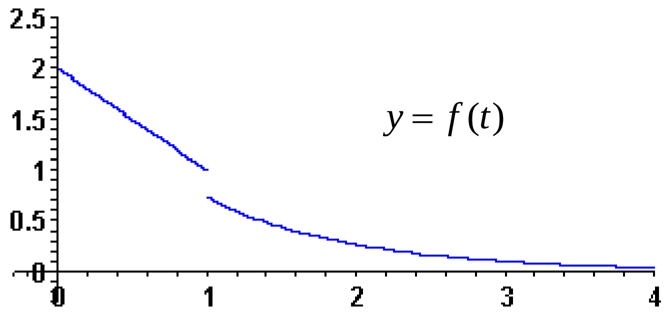
و $f(t)$ ذات رتبة أسية b للقيم $T<t$ فيوجد عدد $0<C$ بحيث $|f(t)|\le Ce^t$ للقيم $T<t$ و منه نحصل على $|I_2|=\int_T^\infty |e^{-st}f(t)|\ dt\le\int_T^\infty e^{-st}e^{bt}dt=C\dfrac{e^{b-s}}{s-b}$ ، أي أن التكامل I_2 متقارب للقيم $b<s$. و بما أن $f(t)$ ذات اتصال متقطع على الفترة المغلقة $[0,T]$ فيكون التكامل I_1 مقيداً . وعليه يكون تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ موجوداً للقيم $b<s$. وبذلك يتم البرهان.

المثال (11): جد $L\{f(t)\}$ حيث $f(t)=\begin{cases}2-t & ,\ 0\le t<1\\ 2e^{-t} & ,\ 1\le t<\infty\end{cases}$

الحل: بما أن $\lim\limits_{t\to1^-}f(t)=\lim\limits_{t\to1^-}2-t=1$ فإنّ $f(t)$ ذات اتصال متقطع على الفترة $[0,\infty)$ ، لاحظ الشكل (8.7). وحسب المبرهنة (8.1) يمكن تبيان أنها ذات رتبة أسية. بذلك يكون تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ موجوداً حسب المبرهنة (8.2). ولإيجاده نستخدم التعريف (8.1) و طرائق التكامل و خواص لنحصل على:

$$F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\ dt=\int_0^1(2-t)e^{-st}dt+\int_1^\infty 2e^{-(s+1)t}dt$$

$$=\frac{2}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{2}{s+1}\quad ,\quad s>0$$



الشكل (8.7)

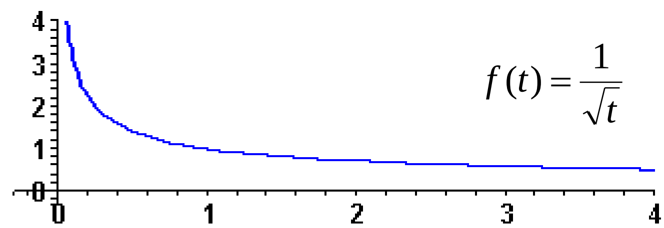
ملاحظة: إن الشروط الموجودة في المبرهنة (8.2) هي كافية لوجود تحويل لابلاس ولكنها ليست ضرورية، أي أن هناك بعض الحالات يكون فيها تحويل لابلاس للدالة موجوداً ولكن شروط المبرهنة لا تتحقق.

المثال (12): بين بأن الدالة $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ **لا تحقق شروط المبرهنة (8.2) على الفترة** $[0,\infty)$ **في حين** $L\{f(t)\}$ **موجود.**

الحل: من الواضح بأن $f(t)$ **ليست ذات اتصال متقطع على الفترة** $[0,\infty)$ **لأن غاية الدالة من اليمين ليست مقيدة، لاحظ الشكل (8.8). باستخدام التعريف (8.1) يكون لدينا**

$$F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-st}\ dt=\int_0^\infty 2e^{-sr^2}dr=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\quad ,\quad s>0$$

حيث تم إستخدام التعويض $t=r^2$ **و جدول التكاملات.**



الشكل (8.8)

كما رأينا فيما سبق، قد يكون استخدام التعريف (8.1) لأيجاد تحويل لابلاس ليس بالأمر الهين لبعض الدوال وذلك لأرتباطه بعملية التكامل. لتسهيل هذه المهمة يمكننا إستخدام الخاصية الخطية لتحويل لابلاس و الجدول الخاص بتحويلات بعض الدوال الشائعة.

المبرهنة (8.3): (الخاصية الخطية)

ليكن a و b عددين حقيقيين ولتكن $f(t)$ و $g(t)$ دالتين كل منهما ذات اتصال متقطع على الفترة $[0,\infty)$ و ذات رتبة أسية. فإنّ

$$L\{af(t)+bg(t)\}=aL\{f(t)\}+bL\{g(t)\} \qquad (8.3)$$

البرهان: باستخدام التعريف (8.1) بشكل مباشرمع بعض صفات التكامل يمكن للطالب استنتاج المعادلة (8.3).

المبرهنة (8.4) : (تحويلات لابلاس لبعض الدوال الأولية)

No.	$f(t)$	$F(s)=L\{f(t)\}$	No.	$f(t)$	$F(s)=L\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$	6.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$	7.	$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
3.	$t^n \ , \ n=2,3,4,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	8.	$\cos \ kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
4.	$t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	9.	$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
5.	$t^{1/2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^3}}$	10.	$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$

المثال (13): باستخدام المبرهنة (8.4) جد تحويل لابلاس لكل من الدوال الآتية:

أ- $f(t)=5$ ، ب- $f(t)=3t-2e^{-t}$

ج- $f(t)=3\sin 2t-2\cos 2t+\frac{1}{4}\cosh 3t$

الحل: باستخدام الخاصية الخطية لتحويل لابلاس (المعادلة 8.3) والتحويلات في المبرهنة (8.4) نحصل على

أ- $$F(s)=L\{5\}=5L\{1\}=\frac{5}{s}\ ,\ s>0$$

ب- $$F(s)=L\{3t-2e^{-t}\}=3L\{t\}-2L\{e^{-t}\}$$
$$=3.\frac{1}{s^2}-2.\frac{1}{s-(-1)}\ ,\ s>0\ \&\ s>-1$$
$$=\frac{3+3s-2s^2}{s^2(s+1)}\ ,\ s>0$$

ج- $$F(s)=L\{3\sin 2t-2\cos 2t+\frac{1}{4}\cosh 3t\}$$
$$=3L\{\sin 2t\}-2L\{\cos 2t\}+\frac{1}{4}L\{\cosh 3t\}$$
$$=3.\frac{2}{s^2+2^2}-2.\frac{s}{s^2+2^2}+\frac{1}{4}.\frac{s}{s^2-3^2}$$
$$=\frac{-7s^3+24s^2+76s-216}{4(s^2+4)(s^2-9)},\ s>0$$

8.2 تحويل لابلاس العكسي و مبرهنات الانتقال:

(Inverse Laplace transform and translation theorems)

بعد أن تعرفنا على تحويل لابلاس في البند السابق سنتعرف في هذا البند على تحويل لابلاس العكسي وذلك بإيجاد $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ عندما تكون الدالة $F(s)$ معلومة وكذلك سنستعرض بعض المبرهنات المتعلقة بأيجاد التحويلات في حالة وجود إنتقال على المحور- t بالنسبة للدالة $f(t)$ أو انتقال على المحور- s بالنسبة للدالة $F(s)$.

التعريف (8.4): تحويل لابلاس العكسي (Inverse Laplace transform)

لتكن $F(s)$ تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ ، أي أن $F(s)=L\{f(t)\}$. فإنّ $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ هي تحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s)$.

المثال (1): جد تحويل لابلاس العكسي لكل من الدوال الآتية:

أ- $F(s)=\frac{1}{s+2}$ ب- $F(s)=\frac{2}{s^3}$ ج- $F(s)=\frac{s}{s^2+3}$

الحل: باستخدام تعريف تحويل لابلاس العكسي (8.4) والتحويلات في المبرهنة (8.4) نحصل على

أ- $$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\{\frac{1}{s-(-2)}\}=e^{-2t}\ ,\ t\geq 0$$

ب- $$f(t)=L^{-1}\{\frac{2!}{s^{2+1}}\}=t^2\ ,\ t\geq 0$$

ج- $$f(t)=L^{-1}\{\frac{s}{s^2+(\sqrt{3})^2}\}=\cos(\sqrt{3}t)\ ,\ t\geq 0$$

لمعرفة وجود تحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s)$ من عدمه يمكننا استخدام المبرهنة الآتية حيث تصف خاصية مهمة لتحويل لابلاس سبق ذكرها في البند السابق.

المبرهنة (8.5) : (غاية تحويل لابلاس)

لتكن $f(t)$ دالة ذات اتصال متقطع على الفترة $[0,\infty)$ و ذات رتبة أسية . فإنّ

$$\lim_{s\to\infty} F(s)=\lim_{s\to\infty}\ L\{f(t)\}=0$$

البرهان:

بما أن $f(t)$ ذات رتبة أسية فحسب التعريف (8.2) توجد الاعداد $0<T,\ C_1>0,\ b$ بحيث $|f(t)|\leq C_1e^t$ للقيم $T<t$. وعليه تكون دالة تحويل لابلاس $F(s)=L\{f(t)\}$ موجودة و معرفة للقيم $b<s$. كذلك، بما أنّ $f(t)$ ذات اتصال متقطع على الفترة $0\leq t\leq T$ فإنّها لا يمكن أن تكون غير مقيدة على هذه الفترة، أي أنه يوجد عدد مثل C_2 بحيث $|f(t)|\leq C_2$ على الفترة $[0,T]$. و بما أن

$$F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\ dt=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt$$

فباستخدام القيود على الدالة $f(t)$ نحصل على

$$|F(s)|\leq\int_0^T e^{-st}C_2dt+\int_T^\infty e^{-st}C_1e^{bt}dt=C_2\frac{1-e^{-sT}}{s}+C_1\frac{e^{(b-s)T}}{b-s}$$

وبما أن $F(s)$ معرفة للقيم $b<s$ فإنّ

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

المثال (2): بين أنّ كلاً من الدوال الآتيـة لا يمكن أن تكـون تحـويل لابـلاس لدالـة ذات اتصـال متقطـع على الفترة $[0,\infty)$ و ذات رتبة أسية.

أ- $F(s) = \dfrac{s}{s+2}$ ب- $F(s) = \dfrac{s^2}{s+1}$ ج- $F(s) = \dfrac{s^3}{s^2+9} - \dfrac{s^2}{s-1}$

الحل: لإثبات المطلوب علينا إيجاد غاية الدالة $F(s)$ عندما $s \to \infty$ فإذا كانت لاتساوي الصفر فحسب المبرهنة (8.5) يعني أنّ $L^{-1}\{F(s)\}$ غير موجودة.

أ- $$\lim_{s\to\infty} F(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{s+2} = 1 \neq 0$$

ب- $$\lim_{s\to\infty} F(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{s+1} = \infty \neq 0$$

ج- $$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty} F(s) &= \lim_{s\to\infty} \frac{s^3}{s^2+9} - \frac{s^2}{s-1} \\ &= \lim_{s\to\infty} \frac{-s^3 - 9s^2}{(s^2+9)(s-1)} \\ &= -1 \neq 0\end{aligned}$$

كما في تحويل لابلاس يحقق تحويل لابلاس العكسي الخاصية الخطية، أي أن

$$L^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = aL^{-1}\{F(s)\} + bL^{-1}\{G(s)\} \qquad \textbf{(8.4)}$$

المثال (3): جد تحويل لابلاس العكسي لكل من الدوال الآتية:

أ- $F(s) = \dfrac{3}{s^4}$ ب- $F(s) = \dfrac{5-2s}{s^2+4}$ ج- $F(s) = \dfrac{3}{s+5} - \dfrac{2}{s}$

الحل: باستخدام الخاصية الخطية ، المعادلة (8.4)، وجدول التحويلات في المبرهنة (8.4) نحصل على

أ- $$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{\frac{3}{3!}.\frac{3!}{s^{3+1}}\} = \frac{1}{2}t^3 \ , \ t \geq 0$$

ب-

$$f(t)=L^{-1}\{\frac{5}{2}.\frac{2}{s^2+2^2}-2.\frac{s}{s^2+2^2}\}=\frac{5}{2}L^{-1}\{\frac{2}{s^2+2^2}\}-2L^{-1}\{\frac{s}{s^2+2^2}\}$$
$$=\frac{5}{2}\sin 2t-2\cos 2t \ , \ t\geq 0$$

ج-

$$f(t)=L^{-1}\{\frac{3}{s+5}-\frac{2}{s}\}=3L^{-1}\{\frac{1}{s-(-5)}\}-2L^{-1}\{\frac{1}{s}\}$$
$$=3e^{-5t}-2 \ , \ t\geq 0$$

للتعرف على مزيد من تحويلات لابلاس دون الرجوع الى التعريف بشكل مباشر نذكر مبرهنة الانتقال الآتية:

المبرهنة (8.6) : (الانتقال على المحور- s)

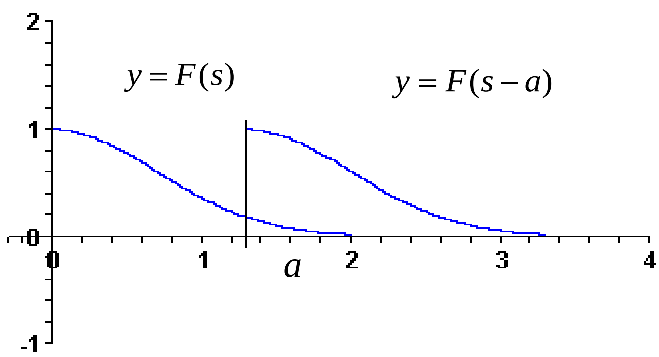
ليكن $F(s)=L\{f(t)\}$. فإنّ لأي عدد a يكون:

$$L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a) \qquad \textbf{(8.5)}$$

البرهان: باستخدام التعريف (8.1):

$$L\{e^{at}f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}.e^{at}f(t)\ dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt=F(s-a)$$

الشكل (8.9) يوضح الأنتقال على المحور- s ، فإذا اعتبرنا s متغيراً حقيقياً فإنّ رسم منحني $F(s-a)$ هو انتقال لرسم الدالة $F(s)$ الى اليمين بمقدار $|a|$ وحدة إذا كانت $a>0$ والى اليسار بمقدار $|a|$ وحدة إذا كانت $a<0$



الشكل (8.9)

قبل ذكر بعض الأمثلة المتعلقة باستخدام المعادلة (8.5) من المفيد أن نكتبها، في حالة إيجاد تحويل لابلاس، بالصيغة

$$L\{e^{at} f(t)\} = L\{f(t)\}\big|_{s\to s-a} = F(s)\big|_{s\to s-a} \qquad \textbf{(8.6)}$$

وفي حالة إيجاد تحويل لابلاس العكسي بالصيغة

$$L^{-1}\{F(s)\big|_{s\to s-a}\} = e^{at}L^{-1}\{F(s)\} = e^{at} f(t) \qquad \textbf{(8.7)}$$

حيث $s\to s-a$ **يرمز الى استبدال** s **بـ** $(s-a)$ **.**

المثال (4): استخدم المعادلة (8.6) لإيجاد تحويل لابلاس لكل من الدوال الآتية:

أ- $f(t) = e^{2t}t^3$ ، **ب-** $f(t) = e^{-3t}\cosh(2t)$ ، **ج-** $f(t) = e^{-t}(3\sin 2t - 2\cos 2t)$

الحل: باستخدام الخاصية الخطية لتحويل لابلاس ، المعادلة (8.3)، و جدول التحويلات في المبرهنة (8.4) والمعادلة (8.6) نحصل على

أ-
$$F(s) = L\{e^{2t}t^3\} = L\{t^3\}\big|_{s\to s-2} = \frac{3!}{s^4}\Big|_{s\to s-2} = \frac{6}{(s-2)^4} \quad , \quad s>2$$

ب-
$$F(s) = L\{e^{-3t}\cosh(2t)\} = L\{\cosh(2t)\}\big|_{s\to s-(-3)} = \frac{s}{s^2-2^2}\Big|_{s\to s+3} = \frac{s+3}{s^2+6s+5}$$

ج-
$$F(s) = L\{e^{-t}(3\sin 2t - 2\cos 2t))\} = L\{3\sin 2t - 2\cos 2t\}\big|_{s\to s-(-1)}$$
$$= \left[\frac{3.2}{s^2+4} - \frac{2s}{s^2+4}\right]_{s\to s+1} = \frac{6-2s}{s^2+2s+5}$$

المثال (5): استخدم المعادلة (8.7) لأيجاد تحويل لابلاس العكسي لكل من الدوال الآتية:

أ- $F(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2}$ ، **ب-** $F(s) = \dfrac{2s}{s^2+4s+5}$

الحل: باستخدام المعادلة (8.7) وجدول التحويلات في المبرهنة (8.4) نحصل على

أ-

$$f(t) = L^{-1}\{\frac{s}{(s-1)^2}\} = L^{-1}\{\frac{s-1+1}{(s-1)^2}\} = L^{-1}\{\frac{s+1}{s^2}\}\Big|_{s\to s-1}$$
$$= e^t .\ L^{-1}\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\} = e^t(1+t)$$

ب-

$$f(t)=L^{-1}\{\frac{2s}{s^2+4s+5}\}=L^{-1}\{\frac{2s}{(s+2)^2+1}\}=L^{-1}\{\frac{2(s+2)-4}{(s+2)^2+1}\}$$

$$=L^{-1}\left\{\left.\frac{2s-4}{s^2+1}\right|_{s\to s-(-2)}\right\}=e^{-2t}.\ L^{-1}\{\frac{2s}{s^2+1}-\frac{4}{s^2+1}\}$$

$$=e^{-2t}(2\cos t-4\sin t)$$

لإيجاد تحويل لابلاس للدوال ذات الاتصال المتقطع من دون اللجوء للتعريف الأساسي (8.1) نحتاج لصياغتها بدلالة دالة درجية وحدوية المعرفة كالآتي:

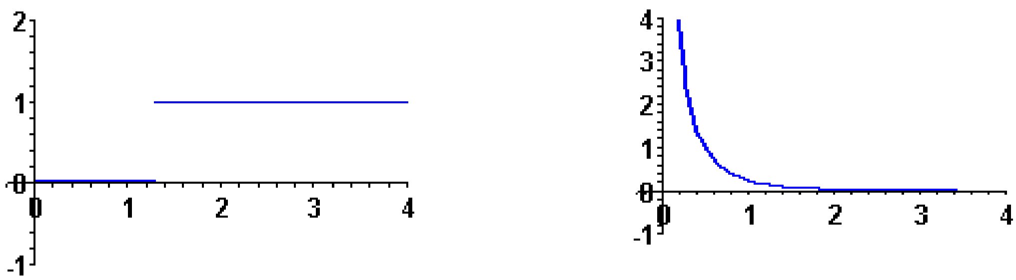
التعريف (8.5) : دالة درجية وحدوية (Unit step function)

تعرّف الدالة الدرجية الوحدوية على الفترة $[0,\infty)$ بالصيغة الآتية:

$$U_a(t)=\begin{cases}0\ , & 0\le t<a\\ 1\ , & a\le t<\infty\end{cases}\qquad \textbf{(8.8)}$$

الشكل (8.10) يحوي رسم دالة درجية وحدوية و تحويل لابلاس لها. و كما ترى فهي معرفة للقيم $0\le t$ و هذا محور اهتمامنا لأن معظم التطبيقات تقتصر على ذلك، حيث t تمثل الزمن. أما تحويل لابلاس لهذه الدالة فيمكن للطالب أن يجده بشكل مباشر من التعريف الأساسي (8.1) ليحصل على:

$$L\{U_a(t)\}=\frac{e^{-as}}{s}\ \ ,\ \ s>0\qquad \textbf{(8.9)}$$



$f(t)=U_a(t)$ $\qquad\qquad$ $F(s)=\dfrac{e^{-as}}{s}$

الشكل (8.10)

ولصياغة الدوال ذات الاتصال المتقطع بدلالة دالة درجية وحدوية يمكننا استخدام المبرهنة الآتية:

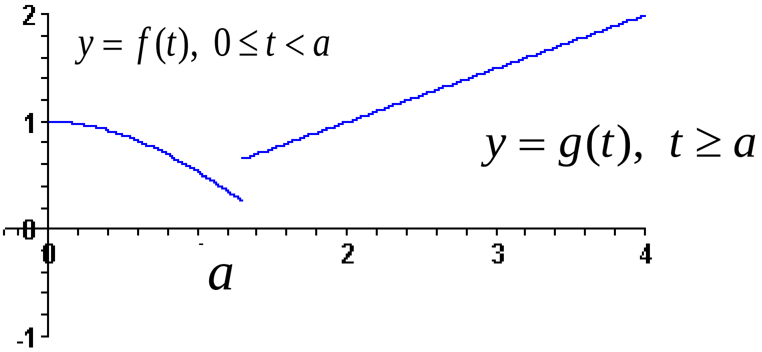
المبرهنة (8.7) :

لتكن $q(t)$ دالة ذات اتصال متقطع على $[0,\infty)$ معرفة كما يأتي:

$$q(t)=\begin{cases} f(t)\ , & 0\le t<a \\ g(t)\ , & a\le t<\infty \end{cases}$$

فإنّ $$q(t)=f(t)+[g(t)-f(t)].U_a(t)$$

البرهان: باستخدام المعادلة (8.8) يمكن للطالب إثباتها (لاحظ الشكل 8.11)



الشكل (8.11)

المثال (6): لكل من الدوال الآتية عبرعنها بدلالة دوال درجية وحدوية:

أ- $p(t)=\begin{cases} 2\ , & 0\le t<2 \\ t\ , & 2\le t<\infty \end{cases}$ ، ب- $q(t)=\begin{cases} \sin t\ , & 0\le t<\pi \\ t\ , & \pi\le t<\infty \end{cases}$

ج- $$r(t)=\begin{cases} -1\ , & 0\le t<1 \\ 2\ , & 1\le t<3 \\ 1\ , & 3\le t<\infty \end{cases}$$

الحل: باستخدام المبرهنة (8.7) وجدول تحويلات لابلاس نحصل على الصيغ المطلوبة

أ- $$p(t)=2+[t-2].U_2(t)$$

ب- $$q(t)=\sin t+[0)-\sin t].U_\pi(t)=\sin t(1-U_\pi(t))$$

ج- $$r(t)=-1+[2-(-1)].U_1(t)+[1-2].U_3(t)=-1+3U_1(t)-U_3(t)$$

المبرهنة الآتية تسهل علينا إيجاد تحويل لابلاس للدوال ذات الاتصال المتقطع وتتضمن انتقالاً على المحور- t .

المبرهنة (8.8) : (الأنتقال على المحور- t)

ليكن $F(s)=L\{f(t)\}$ **و** $a>0$ **. فإنّ**

$$L\{f(t).U_a(t)\}=e^{-as}.L\{f(t)\big|_{t\to t+a}\}=e^{-as}.L\{f(t+a)\} \qquad \textbf{(8.10)}$$

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=U_a(t).L^{-1}\{F(s)\}\big|_{t\to t-a}\}=U_a(t).f(t-a) \qquad \textbf{(8.11)}$$

البرهان: لإثبات المعادلة (8.10) نستخدم التعريف (8.1) و خصائص التكامل لنحصل على

$$L\{f(t).U_a(t)\}=\int_a^{\infty} e^{-st}.f(t)\ dt$$

و بفرض $r=t-a$ **تؤول المعادلة الى**

$$L\{f(t).U_a(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-s(r+a)}.f(r+a)\ dr=e^{-as}L\{f(t+a)\}$$

أما برهان المعادلة (8.11) فيأتي من استبدال $t\leftarrow(t-a)$ **في المعادلة (8.10).**

لاحظ أنّ تحويل لابلاس للدالة الدرجية الوحدوية، المعادلة (8.9) هو تطبيق مباشر للمبرهنة السابقة (المعادلة 8.10) حيث $f(t)=1$ **.**

المثال (7): جد تحويل لابلاس لكل من الدوال في المثال (6).

الحل: باستخدام المبرهنة (8.8) بعد كتابة الدوال بدلالة دوال درجية وحدوية (المثال 6) وجدول التحويلات (المبرهنة 8.4) نحصل على:

أ- بما أن $p(t)=2+[t-2].U_2(t)$ **فإنّ:**

$$L\{p(t)\}=L\{2\}+L\{[t-2].U_2(t)\}=e^{-2s}.L\{[t-2]_{t\to t+2}\}$$
$$=e^{-2s}.L\{t\}=e^{-2s}.\frac{1}{s^2}$$

ب- بما أن $q(t)=\sin t(1-U_\pi(t))$ **فإنّ:**

$$L\{q(t)\}=L\{\sin t\}-L\{\sin t.U_\pi(t)\}=\frac{1}{s^2+1}-e^{-\pi s}.L\{[\sin t]_{t\to t+\pi}\}$$
$$=\frac{1}{s^2+1}-e^{-\pi s}.L\{\sin(t+\pi)\}=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

ج- بما أن $r(t)=-1+3U_1(t)-U_3(t)$ **فإنّ**

$$L\{r(t)\}=-L\{1\}+3L\{U_2(t)\}-L\{U_3(t)\}=\frac{-1}{s}+\frac{3e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-3s}}{s}$$

المثال (8): استخدم المعادلة (8.11) لإيجاد ورسم تحويل لابلاس العكسي لكل من الدوال الآتية:

أ- $G(s)=\dfrac{e^{-3s}}{s-2}+\dfrac{e^{-s}}{s}$ ، ب- $G(s)=(\dfrac{s}{s^2-4}+\dfrac{1}{s^2-4})e^{-s}$

ج- $G(s)=\dfrac{e^{-2s}}{(s-1)^3}$ ، د- $G(s)=\dfrac{s}{s^2+1}+e^{-2\pi s}(\dfrac{2\pi}{s}+\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{s}{s^2+1})$

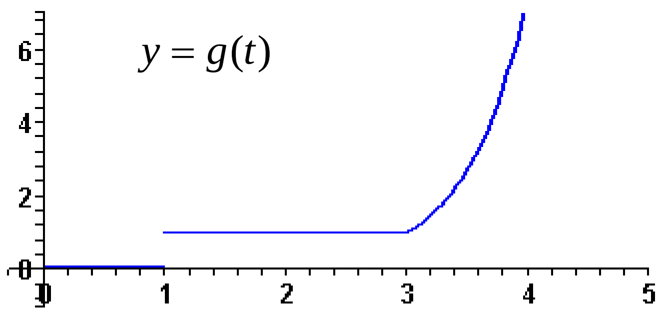
الحل: باستخدام المعادلة (8.11) وجدول التحويلات في المبرهنة (8.4) نحصل على

أ-

$$\begin{aligned} g(t)=L^{-1}\{G(s)\}&=L^{-1}\{e^{-3s}.\frac{1}{s-2}\}+L^{-1}\{e^{-s}.\frac{1}{s}\} \\ &=U_3(t).L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}\big|_{t\to t-3}+U_1(t).L^{-1}\{\frac{1}{s}\}\big|_{t\to t-1}\} \\ &=U_3(t).[e^{2t}\big|_{t\to t-3}]+U_1(t).[1\big|_{t\to t-1}] \\ &=U_3(t).e^{2(t-3)}+U_1(t) \end{aligned}$$

لرسم الدالة $g(t)$ علينا تبسيطها أولا لنحصل على

$$g(t)=\begin{cases} 0 & , \quad 0\le t<1 \\ 1 & , \quad 1\le t<3 \\ e^{2t-6} & , \quad 3\le t<\infty \end{cases}$$



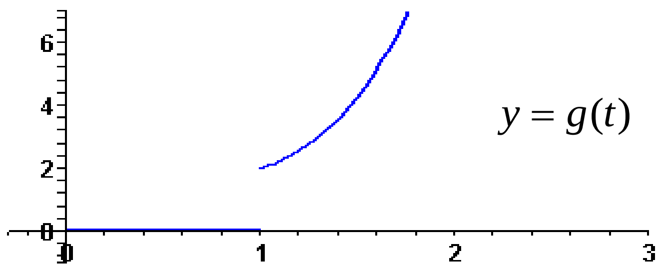
الشكل (8.12)

ب-

$$g(t)=L^{-1}\{G(s)\}=L^{-1}\{(\frac{s}{s^2-4}+\frac{1}{s-2})e^{-s}\}$$
$$=U_1(t).L^{-1}\{\frac{s}{s^2-4}+\frac{1}{s-2}\}\Big|_{t\to t-1}$$
$$=U_1(t).[\cosh(2t)+e^{2t}\Big|_{t\to t-1}]$$
$$=U_1(t).[\cosh(2t-2)+e^{2t-2}]$$

لرسم الدالة $g(t)$ علينا تبسيطها أولا لنحصل على:

$$g(t)=\begin{cases}0 & , \quad 0\le t<1\\ \frac{3}{2}e^{2t-2}+\frac{1}{2}e^{2-2t} & , \quad 1\le t<\infty\end{cases}$$



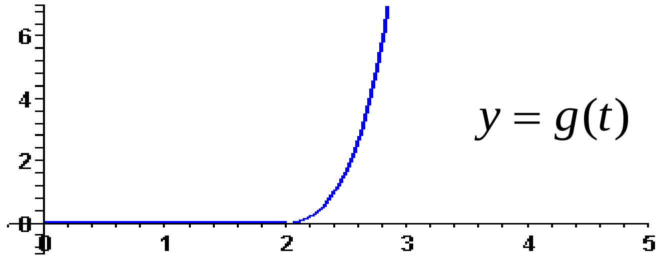
الشكل (8.13)

ج-

$$g(t)=L^{-1}\{G(s)\}=L^{-1}\{e^{-2s}.\frac{1}{(s-1)^3}\}=U_2(t).L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^3}\}\Big|_{t\to t-2}$$
$$=U_2(t).[L^{-1}\{\frac{1}{s}\Big|_{s\to s-1}\}]_{t\to t-2}=U_2(t).[e^tL^{-1}\{\frac{1}{s^3}\}]_{t\to t-2}$$
$$=U_2(t).[e^t\frac{t^2}{2}\}]_{t\to t-2}=U_2(t).\frac{1}{2}e^{t-2}(t-2)^2$$

لرسم الدالة $g(t)$ علينا تبسيطها أولا لنحصل على

$$g(t)=\begin{cases}0 & , \quad 0\le t<2\\ \frac{1}{2}e^{t-1}(t-2)^2 & , \quad 2\le t<\infty\end{cases}$$



الشكل (8.14)

د-

$$g(t)=L^{-1}\{G(s)\}=L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}+L^{-1}\{e^{-2\pi s}(\frac{2\pi}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{s}{s^2+1})\}$$

$$=\cos t+U_{2\pi}(t).L^{-1}\{\frac{2\pi}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{s}{s^2+1}\}|_{t\to t-1}$$

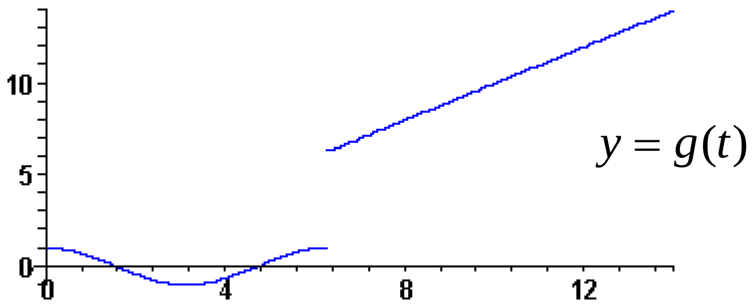
$$=\cos t+U_{2\pi}(t).[2\pi+t-\cos t]_{t\to t-2\pi}$$

$$=U_{2\pi}(t).[2\pi+t-2\pi-\cos(t-2\pi)]$$

$$=\cos t+U_{2\pi}(t).[t-\cos t]$$

لرسم الدالة $g(t)$ علينا تبسيطها أولا لنحصل على

$$g(t)=\begin{cases}\cos t & , \quad 0\le t<2\pi \\ t & , \quad 2\pi\le t<\infty\end{cases}$$



الشكل (8.15)

8.3 تحويل لابلاس للمشتقات وحل مسائل القيم الابتدائية:

(Laplace transform of derivatives and solution of IVP)

في هذا البند سيتم استخدام تحويل لابلاس و تحويل لابلاس العكسي لحل مسائل القيم الابتدائية ذات المعاملات الثابتة. بداية علينا التكلم عن تحويل لابلاس للمشتقات

$$\frac{dy}{dt}, \ \frac{d^2y}{dt^2}, \ \frac{d^3y}{dt^3}, \ \ldots$$

المبرهنة (8.9) : (تحويل لابلاس للمشتقة الأولى)

لتكن $f(t)$ دالة متصلة على الفترة $[0,\infty)$ و ذات رتبة أسية b للقيم $T<t$.

فإذا كانت $f'(t)$ دالة ذات اتصال متقطع على كل فترة مغلقة جزئية من $[0,\infty)$ فإنّ

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) \qquad \textbf{(8.12)}$$

البرهان: باستخدام تعريف تحويل لابلاس، المعادلة (8.2)، والتكامل بالأجزاء يكون لدينا

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \lim_{q\to\infty}[e^{-st} f(t) + s\int_0^q e^{-st} f(t)dt]$$
$$= -f(0) + sL\{f(t)\}$$

و هذا مكافىء للمعادلة (8.12).

بشكل مشابه لتحويل المشتقة الأولى يمكن إثبات

$$L\{f''(t)\} = s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \qquad \textbf{(8.13)}$$

و بشكل عام

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nL\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ \ldots - f^{(n-1)}(0) \quad \textbf{(8.14)}$$

نذكر الآن الخطوات التي علينا إتباعها لحل مسائل القيم الابتدائية الخطية:

<u>خوارزمية لابلاس لمسائل القيم الابتدائية الخطية ذات المعاملات الثابتة</u>

لحل المسألة

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots . + a_1y' + a_0y = f(x),$$
$$y(0) = b_0, \ \ y'(0) = b_1, \ \ldots \ , \ \ y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$$

نتبع الخطوات الآتية:

1- نفرض $Y(s) = L\{y(t)\}$ ثم نجد تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية مستعينين بالقيم الابتدائية.

2- نحل المعادلة الجبرية الناتجة من التحويل في الخطوة السابقة.

3- نستخدم تحويل لابلاس العكسي لإيجاد الحل $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$.

المثال (1): إستخدم تحويلات لابلاس لحل مسألة القيمة الابتدائية الآتية:

$$y' + y = \sin t \ , \ y(0) = 1$$

الحل: باستخدام خوارزمية لابلاس لمسائل القيم الابتدائية نحصل على:

-1 $$sY - y(0) + Y = \frac{1}{s^2+1}$$

-2 $$Y(s+1) - 1 = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow Y = \frac{s^2+2}{(s+1)(s^2+1)}$$

-3 لأجراء التحويل العكسي علينا تبسيط Y الى مجموع كسور جزئية بسيطة وذلك بفرض

$$\frac{s^2+2}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

وبمقارنة بسطي الطرفين نحصل على:

$$s^2+1 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s+1)$$

لإيجاد المعاملات A, B, C نستطيع اختيار قيم مناسبة للمتغير s أو مقارنة معاملات s^n للقيم المختلفة ل n . فعندما نستخدم التعويض $s=-1$ تؤول المعادلة الى: $3 = 2A \Rightarrow A = \frac{3}{2}$ ،
وبمقارنة معاملات s^2 نحصل على : $1 = A + B \ \Rightarrow \ B = \frac{-1}{2}$ ، **وبمقارنة معاملات s نحصل على:** $0 = B + C \Rightarrow \ C = \frac{1}{2}$ **. وعليه فإنّ:**

$$Y(s) = \frac{3/2}{s+1} + \frac{-s/2+1/2}{s^2+1} = \frac{3}{2}.\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}.\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}.\frac{1}{s^2+1}$$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسي نحصل على حل المسألة:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{3}{2}.L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} - \frac{1}{2}.L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} + \frac{1}{2}.L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}$$
$$= \frac{3}{2}\ e^{-t} - \frac{1}{2}\ \cos t + \frac{1}{2}\ \sin t$$

المثال (2): إستخدم

أ- تحويلات لابلاس لحل مسألة القيم الابتدائية الآتية:

$$y'' + 4y = \sin 3t \ , \ \ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0$$

ب- طريقة أخرى غير تحويل لابلاس . هل من الممكن الحصول على حل مختلف؟ لماذا؟

الحل: أ- باستخدام خوارزمية لابلاس لمسائل القيم الابتدائية نحصل على

$$s^2 Y - s \ y(0) - y'(0) + 4Y = \frac{3}{s^2 + 9}$$

وذلك بإجراء تحويل لابلاس على المعادلة. وبالتعويض عن القيم الابتدائية و حل المعادلة بالنسبة للمتغير Y نحصل على

$$Y = \frac{3}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)}$$

لتبسيط Y الى مجموع كسور جزئية بسيطة نفرض:

$$\frac{3}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{Cs + D}{s^2 + 9}$$

وبمقارنة بسطي الطرفين نحصل على

$$3 = (As + B)(s^2 + 9) + (Cs + D)(s^2 + 4)$$

لإيجاد المعاملات A, B, C, D نستخدم التعويض العقدي $s = 2i$ فتؤول المعادلة الى

$$3 = (2Ai + B)(-4 + 9) \ \Rightarrow \ 3 = 5B \ , \ 0 = 10A \ \Rightarrow B = \frac{3}{5} \ , \ A = 0$$

وبمقارنة معاملات s^3 نحصل على $0 = A + C \ \Rightarrow \ C = 0$. وبمقارنة الثوابت نحصل على

$3 = 9B + 4D \ \Rightarrow \ D = \frac{-3}{5}$، وعليه فإنّ

$$Y(s) = \frac{3/5}{s^2 + 4} + \frac{-3/5}{s^2 + 9}$$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسي نحصل على حل المسألة:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{3}{10}.L^{-1}\{\frac{2}{s^2 + 2^2}\} - \frac{1}{5}.L^{-1}\{\frac{3}{s^2 + 3^2}\}$$

$$= \frac{3}{10} \ \sin 2t - \frac{1}{5} \ \sin 3t$$

ب- يمكن للطالب أن يستخدم طريقة المعاملات غير المحددة لحل المسألة . و بما أن حل مسألة القيم الابتدائية وحيد فمن غير الممكن الحصول على حل مختلف، أي الحل بالطريقتين متشابه.

المثال (3): إستخدم تحويلات لابلاس لحل مسألة القيم الابتدائية الآتية:

$$y^{(4)}+2y''+y=4te^{t}\ \ ,\ \ y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$$

الحل: بإجراء تحويل لابلاس على المعادلة والتعويض عن القيم الابتدائية نحصل على:

$$s^4Y+2s^2Y+Y=4L\{t\}\big|_{s\to s-1}=\frac{4}{(s-1)^2}$$

وبحل المعادلة بالنسبة للمتغير Y نحصل على

$$Y=\frac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2}$$

لتبسيط Y الى مجموع كسور جزئية بسيطة نفرض

$$\frac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{Cs+D}{s^2+1}+\frac{Es+F}{(s^2+1)^2}$$

وبمقارنة بسطي الطرفين نحصل على

$$4=A(s-1)(s^2+1)^2+B(s^2+1)^2+(Cs+D)(s-1)^2(s^2+1)$$
$$+(Es+F)(s-1)^2$$

لإيجاد المعاملات A,B,C,D,E,F نستخدم التعويض العقدي $s=i$ فتؤول المعادلة الى

$$4=(Ei+F)(i-1)^2\ \Rightarrow\ 4=2E-2iF\ \Rightarrow\ 4=2E\ ,\ 0=-2F$$
$$\Rightarrow E=2\ ,\ F=0$$

ومن التعويض $s=1$ نحصل على $4=4B$ أي أن $B=1$. وبمقارنة معاملات s^5 نحصل على: $0=A+C\ \Rightarrow C=-A$، وبمقارنة الثوابت نحصل على

$$4=-A+B+D+F\ \Rightarrow\ -A+1+D=4\ \Rightarrow D=3+A$$

وبمقارنة معاملات s^4 نحصل على

$$0=-A+B-2C+D\ \Rightarrow 0=0=-A+1+2A+3+A\ \Rightarrow A=-2$$
$$\Rightarrow C=2\ ,\ D=1$$

وعليه فإنّ

$$Y(s)=\frac{-2}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{2s+1}{s^2+1}+\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسي نحصل على حل المسألة

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=-2.L^{-1}\{\frac{1}{s}\Big|_{s\to s-1}\}+L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\Big|_{s\to s-1}\}+L^{-1}\{\frac{2s}{s^2+1}\}$$

$$+L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}+2L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}$$

$$=-2e^t+te^t+2\cos t+\sin t+t\sin t$$

المثال (4): استخدم تحويلات لابلاس لحل مسألة القيم الابتدائية الآتية:

$$y''+4y'+6y=1+e^{-t}\ \ ,\ \ y(0)=y'(0)=0$$

الحل: بإجراء تحويل لابلاس على المعادلة والتعويض عن القيم الابتدائية نحصل على

$$s^2Y+4sY+6Y=\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}$$

وبحل المعادلة بالنسبة للمتغير Y وتبسيط الناتج الى مجموع كسور جزئية بسيطة نحصل على

$$Y=\frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)^2}=\frac{1/6}{s}+\frac{1/3}{s+1}-\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}$$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسي نحصل على حل المسألة

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$$

$$=\frac{1}{6}L^{-1}\{\frac{1}{s}\}+\frac{1}{3}L^{-1}\{\frac{1}{s}\Big|_{s\to s+1}\}-L^{-1}\{\frac{(s+2)/2+(5/3-2/2)}{(s+2)^2+(\sqrt{2})^2}\}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{e^{-t}}{3}-\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+(\sqrt{2})^2}\Big|_{s\to s+2}\}-\frac{4}{6\sqrt{2}}L^{-1}\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+(\sqrt{2})^2}\Big|_{s\to s+2}\}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{e^{-t}}{3}-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}t-\frac{2}{3\sqrt{2}}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

المثال (5): استخدم تحويلات لابلاس لحل مسألة القيمة الابتدائية الآتية، ثم ارسم دالة الحل:

$$y'+y=f(t)\ \ ,\ \ y(0)=0\ \ ,\ \ f(t)=\begin{cases}1 & ,\ \ 0\le t<1\\ -1 & ,\ \ 1\le t<\infty\end{cases}$$

الحل: لإجراء تحويل لابلاس على المعادلة علينا كتابة الدالة $f(t)$ بدلالة دالة درجية وحدوية

وذلك باستخدام المبرهنة (8.7) ، أي $f(t)=1-2U_1(t)$ وبذلك نحصل على

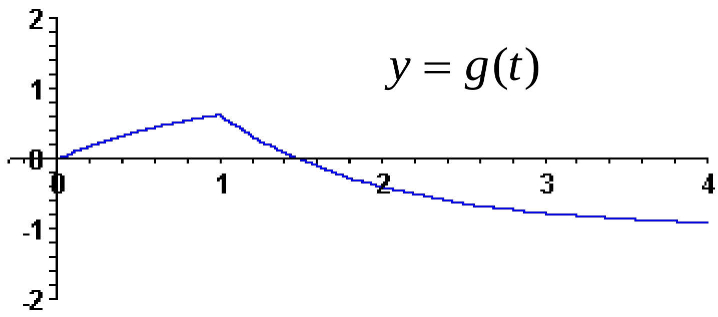
$sY+Y=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$ **. وبحل المعادلة بالنسبة للمتغير Y نحصل على** $Y=\frac{1-2e^{-s}}{s(s+1)}$ **.**

نفرض بأن $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$. باستخدام تجزئية الكسور وتحويل لابلاس العكسي يكون لدينا $g(t)=1-e^{-t}$. وباستخدام مبرهنة الانتقال على المحور- t، المعادلة (8.11) ، نحصل على:

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}\{Y(s)\} \\ &= L^{-1}\{G(s)\}-2L^{-1}\{e^{-s}G(s)\} \\ &= g(t)-2g(t-1)U_1(t) \\ &= 1-e^{-t}-2(1-e^{-(t-1)})U_1(t) \end{aligned}$$

لرسم الدالة $g(t)$ علينا تبسيطها أولا لنحصل على

$$g(t)=\begin{cases} 1-e^{-t} & , \quad 0\le t<1 \\ -1-e^{-t}+2e^{1-t} & , \quad 1\le t<\infty \end{cases}$$



الشكل (8.16)

المثال (6): استخدم تحويلات لابلاس لحل مسألة القيم الابتدائية الآتية، ثم ارسم دالة الحل:

$$y''+4y=f(t)\ ,\ y(0)=y'(0)=0\ ,\ f(t)=\begin{cases}\cos 2t & , \quad 0\le t<2\pi \\ 0 & , \quad 2\pi\le t<\infty\end{cases}$$

الحل: لإجراء تحويل لابلاس على المعادلة علينا كتابة الدالة $f(t)$ بدلالة دالة خطوة وحدوية وذلك باستخدام المبرهنة (8.7) ، أي $f(t)=\cos 2t-\cos 2t.U_{2\pi}(t)$. وبذلك نحصل من تطبيق المعادلة (8.10) على

$$\begin{aligned} s^2Y+4Y &= L\{f(t)\} \\ &= L\{\cos 2t\}-e^{-2\pi s}L\{\cos 2(t+2\pi)\} \\ &= \frac{s}{s^2+4}-e^{-2\pi s}.\frac{s}{s^2+4} \end{aligned}$$

وبحل المعادلة بالنسبة للمتغير Y نحصل على $Y=\dfrac{s}{(s^2+4)^2}-e^{-2\pi s}\dfrac{s}{(s^2+4)^2}$.

نفرض بأن $G(s)=\dfrac{s}{(s^2+4)^2}$. باستخدام جدول تحويل لابلاس يكون لدينا

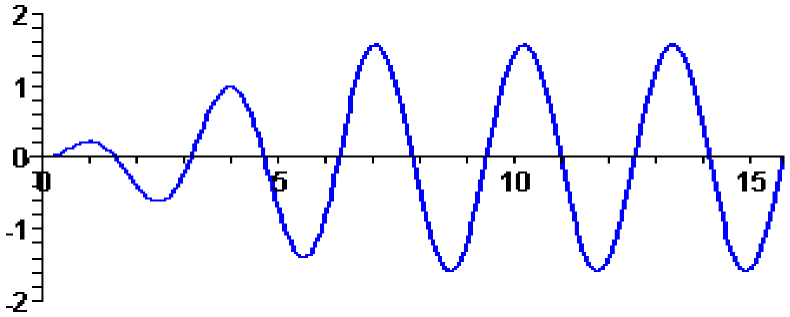
$$g(t)=L^{-1}\{G(s)\}=\frac{1}{4}t\sin 2t$$

وباستخدام مبرهنة الانتقال على المحور- t ، المعادلة (8.11) نحصل على:

$$\begin{aligned} y(t)&=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\{G(s)\}-L^{-1}\{e^{-2\pi s}G(s)\} \\ &=g(t)-g(t-2\pi)U_{2\pi}(t) \\ &=\frac{1}{4}t\sin 2t-\frac{1}{4}(t-2\pi)\sin 2(t-2\pi).U_1(t) \end{aligned}$$

لرسم الدالة $g(t)$ علينا تبسيطها أولا لنحصل على

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}t\sin 2t & , \quad 0\le t<2\pi \\ \dfrac{\pi}{2}\sin 2t & , \quad 2\pi\le t<\infty\end{cases}$$



$y=g(t)$

الشكل (8.17)

8.4 تحويلات لابلاس لبعض الدوال المهمة ومبرهنة الالتفاف

(Laplace trans. of important functions and the convolution theorem)

في هذا البند نتعرف على مزيد من تحويلات لابلاس كتحويل الدوال ذات الصيغة $t^n f(t)$ والدوال الدورية (Periodic functions) ودالة ديراك – دلتا و بعض التكاملات الخاصة. تتيح هذه التحويلات إمكانيات حل المعادلات التفاضلية ذات الدوال الدورية و كذلك بعض المعادلات التكاملية والتكاملية - التفاضلية.

المبرهنة (8.10) : مشتقات التحويل

لتكن $F(s)=L\{f(t)\}$. فإنّ

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \qquad (8.15)$$
للقيم $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$.

البرهان: باستخدام تعريف تحويل لابلاس، المعادلة (8.2) يكون لدينا:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty -te^{-st} f(t)dt = -\int_0^\infty e^{-st}.tf(t)dt = -L\{tf(t)\}$$

أي أن $L\{tf(t)\} = (-1)^1 \frac{d}{ds}F(s)$ **. وهذا يثبت المعادلة (8.15) للقيمة** $n = 1$ **. و لاثباتها للقيمة** $n = 2$ **نستخدم المعادلة السابقة لنحصل على:**

$$L\{t^2 f(t)\} = L\{t.tf(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}L\{tf(t)\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}L\{f(t)\}$$

وبالأسلوب نفسه يمكن إثبات المعادلة (8.15) للقيم الأخرى لـ n**.**

المثال (1): استخدم المبرهنة (8.10) لأيجاد $L\{t^2e^{3t}\}$ **.**

الحل: باستخدام المبرهنة (8.10) و جدول التحويلات نحصل على:

$$L\{t^2e^{3t}\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}L\{e^{3t}\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}[\frac{2!}{s-3}] = \frac{2}{(s-3)^3}$$

وهي النتيجة نفسها التي نحصل عليها إذا ما استخدمنا مبرهنة الانتقال على المحور- s**.**

المثال (2): إستخدم المبرهنة (8.10) لإيجاد $L\{t\cos kt\}\ ,\ L\{t\sin kt\}$ **.**

الحل: باستخدام المبرهنة (8.10) و جدول التحويلات نحصل على

$$L\{t\sin kt\} = (-1)\frac{d}{ds}L\{\sin kt\} = -\frac{d}{ds}[\frac{k}{s^2+k^2}] = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$$

$$L\{t\cos kt\} = (-1)\frac{d}{ds}L\{\cos kt\} = -\frac{d}{ds}[\frac{s}{s^2+k^2}] = \frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$$

المثال (3): حل مسألة القيمة الابتدائية الآتية ثم ارسم دالة الحل وعلق على ما يمثله رسم الدالة.

$$y' + 2y = t\cos 2t \ ,\ \ y(0) = 1$$

الحل: باستخدام خوارزمية لابلاس لمسائل القيم الابتدائية نحصل على:

$$sY - y(0) + 2Y = \frac{s^2 - 4}{(s^2+4)^2}$$

وذلك بإجراء تحويل لابلاس على المعادلة واستخدام التحويل في المثال السابق. بالتعويض عن القيم الابتدائية و حل المعادلة بالنسبة للمتغير Y و تبسيطها نحصل على

$$Y = \frac{1}{s+2} + \frac{s-2}{(s^2+4)^2}$$

$$= \frac{1}{s+2} + \frac{s}{(s^2+4)^2} - \frac{2}{(s^2+4)^2}$$

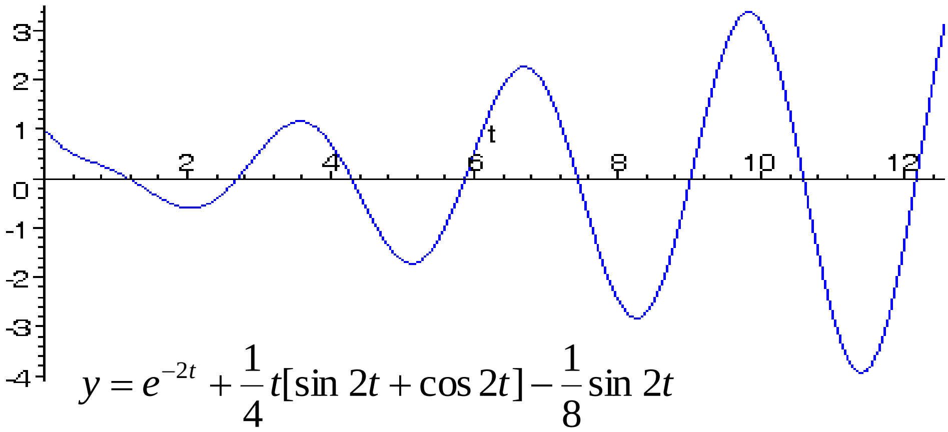
باستخدام الجدول العام لتحويلات لابلاس نحصل على حل المسألة

$$y(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s+2}\} + \frac{1}{4}.L^{-1}\{\frac{2.2s}{(s^2+2^2)^2}\} - \frac{1}{8}.L^{-1}\{\frac{2.2^3}{(s^2+2^2)^2}\}$$

$$= e^{-2t} + \frac{1}{4}\ t\sin 2t - \frac{1}{8}\ (\sin 2t - 2t\cos 2t)$$

$$= e^{-2t} + \frac{1}{4}t[\sin 2t + \cos 2t] - \frac{1}{8}\sin 2t$$

الشكل (8.18) يحوي دالة الحل التي تمثل اهتزازا كارثيا (غير مسيطر عليه).



الشكل (8.18)

8.4.1 تحويل لابلاس للدوال الدورية

توجد تطبيقات عديدة تهتم بالدوال الدورية ومنها تلك التي تؤول نماذجها الرياضية الى معادلات تفاضلية تحوي هذا النوع من الدوال. سنبدأ بذكر تعريفها أولا.

التعريف (8.6): دوال دورية (Periodic functions)

تكون الدالة $f(t)$ دورية إذا وجد عدد موجب T بحيث $f(t+T)=f(t)$ لكل $0\le t$ و تسمى أصغر قيمة T تحقق المعادلة بطول دورة الدالة.

المثال (4): أثبت أنَ كلاً من الدوال الآتية دورية ثم جد طول دورة كل منها:

أ- $f(t)=\cos 2t,\ t\ge 0$ ب- $g(t)=t-2[\frac{t}{2}]$ ج- $h(t)=(-1)^{[t]}$

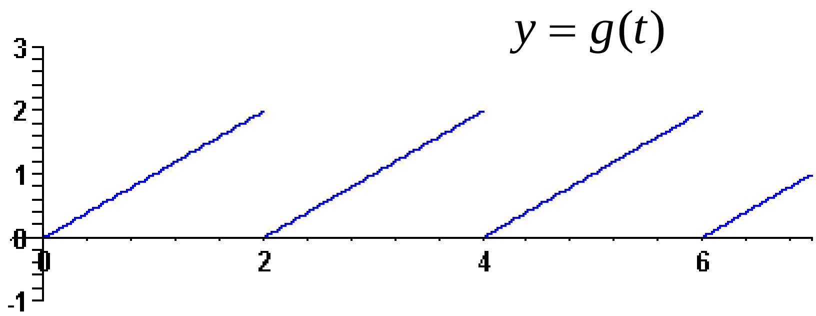
الحل: أ- بما أن $\cos 2t=\cos(2t+2\pi)$ للقيم $0\le t$ فإنّ الدالة دورية والدورة الأولى تحقق $0\le 2t\le 2\pi$. أي أن $0\le t\le \pi$، وبذلك تكون الدالة $f(t)$ دورية بطول π للدورة.

ب- قبل الإجابة نستذكر تعريف دالة الصحيح الأعظم $[t]$ حيث : $[t]=$ أكبرعدد صحيح أصغر أو يساوي t ومن خصائصه هو أن $[t+k]=[t]+k$ لكل عدد صحيح k.

وبذلك تكون $g(t+2)=t+2-2[\frac{t+2}{2}]=t+2-2[\frac{t}{2}]-2=f(t)$

و عليه فإنّ الدالة دورية بطول 2 للدورة. لرسم الدالة علينا كتابتها بشكل مفصل كالأتي:

$$g(t)=t-2[\frac{t}{2}]=\begin{cases} t & ,\ 0\le t<2 \\ t-2 & ,\ 2\le t<4 \\ t-4 & ,\ 4\le t<6 \\ \vdots & ,\ \vdots \end{cases}$$



الشكل (8.19)

جـ - بما إن

$$[t]=\begin{cases} 0, & 0\le t<1 \\ 1, & 1\le t<2 \\ 2, & 2\le t<3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

فإن $(-1)^{[t]}$ تساوي 1 في حالة $[t]=0,\ 2,\ 4,\Lambda$ وتساوي -1 في حالة $[t]=1,\ 3,\ 5,\Lambda$. عليه تكون الدالة $h(t)$ دورية بطول $T=2$

لتسهيل إيجاد تحويل لابلاس للدوال الدورية يمكننا استخدام المبرهنة الآتية:

المبرهنة(8.11) : تحويل الدوال الدورية (Trasform of periodic functions)

لتكن $f(t)$ دالة دورية بطول T للدورة و ذات اتصال متقطع على الفترة $[0,\infty)$. فإنّ $L\{f(t)\}$ موجود للقيم $0<s$ و يمكن إيجاده كما يأتي:

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt \qquad \textbf{(8.16)}$$

البرهان: باستخدام تعريف تحويل لابلاس و تجزئة التكامل يكون لدينا

$$L\{f(t)\}=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt$$

بفرض $u=t-T$ يؤول التكامل الثاني إلى :

$$\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt=+\int_0^\infty e^{-s(u+T)}f(u+T)du=e^{-sT}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du=e^{-sT}L\{f(t)\}$$

بذلك نحصل على المعادلة $L\{f(t)\}=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+e^{-sT}L\{f(t)\}$. و بحلها بالنسبة للتحويل $L\{f(t)\}$ يتم البرهان.

المثال (5): جد $L\{f(t)\}$ حيث $f(t)=(-1)^{[t]}$

الحل: لقد بينا في المثال (4) بأن $f(t)$ دالة دورية بطول $T=2$ للدورة. و عليه نحصل باستخدام المعادلة (8.16) على: $L\{f(t)\}=\dfrac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}(-1)^{[t]}dt$.

وبما أنّ $[t]=0$ للقيم $0\le t<1$ و $[t]=1$ للقيم $1\le t<2$ فإنّ

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2s}}[\int_0^1 e^{-st}dt+\int_1^2 -e^{-st}dt]=\frac{1}{1-e^{-2s}}[\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^1+\frac{-e^{-st}}{-s}\bigg|_1^2]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}[\frac{e^{-s}-1}{-s}+\frac{e^{-2s}-e^{-s}}{s}]=\frac{(e^{-s}-1)^2}{s(1-e^{-2s})}=\frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$$

المثال (6): جد دالة حل مسألة القيم الابتدائية:

$$y''+4y=f(t),\quad y(0)=y'(0)=0$$

حيث $f(t)=\begin{cases}1 & , \ 0\le t<1\\ 0 & , \ 1\le t<2\end{cases}$ و $f(t+2)=f(t)$ للقيم $0\le t$. ثم ارسمها على الفترة $[0,3]$.

الحل: بما أن الدالة $f(t)$ دورية بطول $T=2$ للدورة، فباستخدام المعادلة (8.16) نحصل على:

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^1 e^{-st}dt=\frac{1}{s(1+e^{-s})}$$

و عليه تؤول المعادلة التفاضلية بعد إجراء تحويل لابلاس عليها الى

$s^2Y+4Y=\dfrac{1}{s(1+e^{-s})}$ ومنها نحصل على $Y=\dfrac{1}{s(s^2+4)(1+e^{-s})}$. لإجراء التحويل العكسي علينا أولاً استخدام صيغة مجموع السلسلة الهندسية

$$\frac{1}{1-x}=1+x^2+x^3+\dots\ ,\ |x|<1$$

وذلك بفرض $x=-e^{-s}$ لنحصل على $\dfrac{1}{1+e^{-s}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-ns}$ و من ثم

$$Y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-ns}}{s(s^2+4)}$$

فإذا افترضنا أنّ $H(s)=\dfrac{1}{s(s^2+4)}$ فإنّ تحويل لابلاس العكسي سيكون $h(t)=t-\cos t$.

وباستخدام مبرهنة الأنتقال على المحور- t يكون

$$L^{-1}\{e^{-ns}H(s)\}=U_n(t)\ \ h(t-n)$$

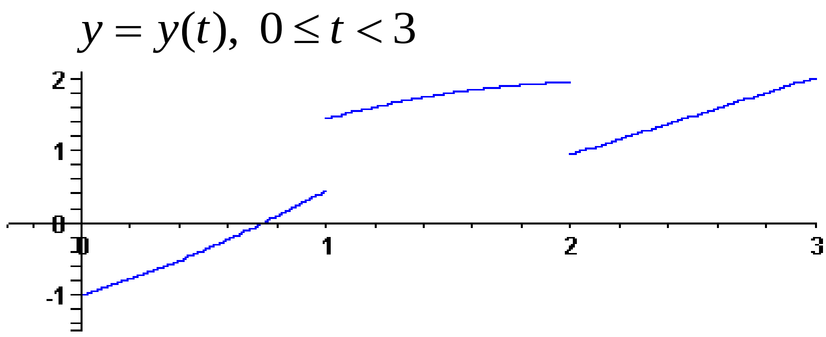
ومنه نحصل على حل المسألة:

$$\begin{aligned}y(t)=L^{-1}\{Y\}&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n U_n(t)\ \ h(t-n)\\ &=h(t)U_0(t)-h(t-1)U_1(t)+h(t-2)U_2(t)+\dots\end{aligned}$$

الذي يمكن تبسيطه على الفترة $[0,3)$ كالآتي:

$$y=\begin{cases}h(t) & , \quad 0\le t<1\\ h(t)-h(t-1) & , \quad 1\le t<2\\ h(t)-h(t-1)+h(t-2), & \quad 2\le t<3\end{cases}\quad \text{حيث} \quad h(t)=t-\cos t$$

والشكل (8.20) يوضح الرسم:



الشكل (8.20)

8.4.2 تحويل لابلاس لدالة ديراك - دلتا (Dirac-Delta function)

لقد سبق أن تطرقنا إلى معادلات تفاضلية تكون فيها دالة القوة متصلة بشكل متقطع. وكحالة خاصة لذلك سنعرف دالة النبضة الوحدوية لارتباطها بدالة ديراك- دلتا التي سنعرفها لاحقا.

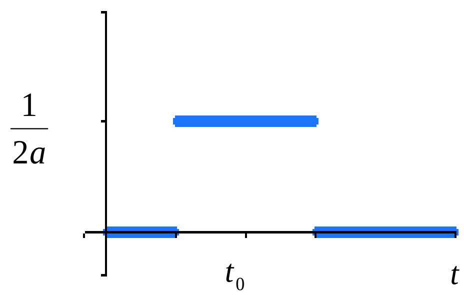
التعريف (8.7): دالة النبضة الوحدوية (Unit impuls function)

يرمز لدالة النبضة الوحدوية بـ $\delta_a(t-t_0)$ و تعرف كالآتي:

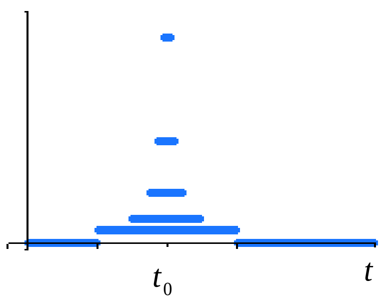
$$\delta_a(t-t_0)=\begin{cases} 0 & ,\ 0\le t<t_0-a \\ \dfrac{1}{2a} & ,\ a-t_0\le t<a+t_0 \\ 0 & ,\ t\ge t_0+a \end{cases} \qquad \textbf{(8.17)}$$

حيث a و t_0 قيم موجبة.

الشكل (8.21أ) يوضح هيئتها حيث تمثل نموذجا لدوال القوة التي تكون ثابتة لفترة وجيزة و تصغر خارجها. كما أن الشكل (8.21 ب) يبين سلوكها عندما $0 \leftarrow a$. و قد سميت بالوحدوية لتحقيقها $\int_0^\infty \delta_a(t-t_0)dt=1$.



$y=\delta_a(t-t_0)$



δ_a عندما $0 \leftarrow a$

الشكل (8.21 ب) الشكل (8.21 أ)

من الناحية العملية يبدو استخدام تقريب لدالة النبضة الوحدوية أكثر ملائمة في التطبيقات، وذلك بأعتبار $a \to 0$ ، و هي دالة ديراك.

التعريف (8.8): دالة ديراك- دلتا (Dirac-Delta function)

تعرف دالة ديراك- دلتا بالغاية

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a\to 0} \delta_a(t-t_0) \qquad \textbf{(8.18)}$$

تتميز دالة ديراك- دلتا بالصفتين الآتيتين:

أ- $\int_0^\infty \delta(t-t_0)dt = 1$ و ب- $\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty & , \ t = t_0 \\ 0 & , \ t \neq t_0 \end{cases}$

وفي ما يأتي تجد تحويل لابلاس لهذه الدالة.

المبرهنة (8.12) : تحويل دالة ديراك- دلتا

$$L\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0} \text{ للقيم } 0 < t_0 \qquad \textbf{(8.19)}$$

البرهان: باستخدام المبرهنة (8.7) نستطيع كتابة دالة النبضة الوحدوية بدلالة دوال خطوة وحدوية كما يأتي:

$$\delta_{\mathrm{a}}(t-t_0) = \frac{1}{2a}[U_{t_0-a} - U_{t_0+a}]$$

وحسب الخاصية الخطية لتحويل لابلاس والمعادلة (8.9) نحصل على

$$L\{\delta_{\mathrm{a}}(t-t_0)\} = \frac{1}{2a}[\frac{e^{-s(t_0-a)}}{s} - \frac{e^{-s(t_0+a)}}{s}]$$

ولإيجاد الغاية عندما $a \to 0$ علينا تطبيق قاعدة لوبيتال وذلك لحصولنا على الصيغة غيرالمحددة $\frac{0}{0}$ عند إجراء الغاية على البسط والمقام بشكل منفرد. بذلك يكون لدينا

$$L\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{x\to\infty} \delta_a(t-t_0) = e^{-st_0} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{sa} - e^{-sa}}{2sa} = e^{-st_0}$$

المثال (7): حل مسألة القيمة الابتدائية الآتية ثم ارسم دالة الحل.

$$y' - 3y = \delta(t-2) \ , \ y(0) = 0$$

الحل: باستخدام خوارزمية لابلاس لمسائل القيم الابتدائية والمعادلة (8.18) نحصل على

$sY - 3Y = e^{-2s}$ **وبحل المعادلة بالنسبة للمتغير** Y **نحصل على** $Y = \dfrac{e^{-2s}}{s-3}$**. وبإجراء تحويل لابلاس العكسي نحصل على الحل**

$$y = L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s-3}\right\} = U_2(t) \ L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}\Bigg|_{t \to t-2} = U_2(t) \ e^{3t}\Big|_{t \to t-2}$$

$$= U_2(t) \ e^{3(t-2)}$$

المثال (8): حل مسألة القيم الابتدائية الآتية ثم ارسم دالة الحل:

$$y'' + y = 4\delta(t - 2\pi) \ , \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0$$

الحل: باستخدام خوارزمية لابلاس لمسائل القيم الابتدائية والمعادلة (8.18) نحصل على

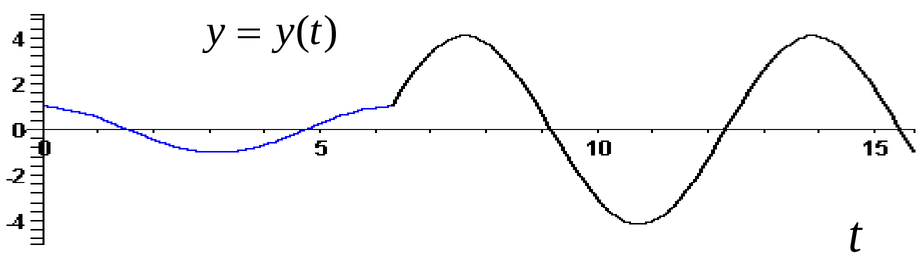
$s^2Y - sy(0) - y'(0) + Y = 4e^{-2\pi s}$ **وبالتعويض عن القيم الابتدائية وحل المعادلة بالنسبة للمتغير** Y **نحصل على** $Y = \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{4e^{-2\pi s}}{s^2+1}$**. وبإجراء تحويل لابلاس العكسي و استخدام مبرهنة الانتقال على المحور-** t **نحصل على الحل**

$$y = \cos t + U_{2\pi} \ 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\Bigg|_{t \to t-2\pi} = \cos t + 4U_{4\pi}(t) \ \sin(t - 2\pi)$$

وتبسيط الحل يؤول إلى

$$y = \begin{cases} \cos t & , \ 0 \le t < 2\pi \\ \cos t + 4\sin t & 2\pi \le t < \infty \end{cases}$$

الشكل (8.22) يمثل دالة الحل حيث يأخذ هيئة توافقية بسيطة لحد $t = 2\pi$ **ثم يبدأ تأثير النبط الوحدوي ليزيد سعة الذبذبة.**



الشكل (8.22)

8.4.3 الالتفاف (Convolution)

سنتناول الآن الالتفاف والمبرهنة التي تسهل إيجاد تحويلات لابلاس لبعض التكاملات وتحويلات لابلاس العكسية لبعض الدوال الأكثر تعقيدا مما سبق. نبدأ بإعطاء التعريف.

التعريف (8.9): الألتفاف

لتكن كل من f و g دالة ذات اتصال متقطع على الفترة $[0,\infty)$. يعرف التفاف الدالتين f و g كالآتي:

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \qquad (8.20)$$

المثال (9): جد أ- $t * e^{-t}$ ب- $e^{-t} * t$ ج- $\sin t * e^{t}$

الحل: باستخدام التعريف (8.9) مع التكامل بالأجزاء نحصل على

أ-
$$t * e^{-t} = \int_0^t \tau \ e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t}(\tau e^{\tau} - e^{\tau})]_0^t = e^{-t}[(te^{t} - e^{t}) - (-1)]$$
$$= t - 1 + e^{-t}$$

ب-
$$e^{-t} * t = \int_0^t e^{-\tau}(t-\tau) d\tau = (\tau - t)e^{-\tau} + e^{\tau}]_0^t = (e^{-t}) - (-t+1)$$
$$= t - 1 + e^{-t}$$

ج-
$$\sin t * e^{t} = \int_0^t \sin \tau \ e^{t-\tau} d\tau = \frac{1}{2}(e^{t} - \sin t - \cos t)$$

لاحظ في المثال السابق أنّ $t * e^{-t} = e^{-t} * t$. في الحقيقة يمكن للطالب أن يبرهن أنّ هذه الخاصية هي حالة عامة، أي أن:

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \qquad (8.21)$$

المبرهنة (8.13) : مبرهنة الألتفاف (Convolution theorem)

لتكن كل من f , g دالة ذات اتصال متقطع على الفترة $[0,\infty)$ وذات رتبة أسية وأن $L\{g(t)\} = G(s)$ و $L\{f(t)\} = F(s)$. فإنّ

$$L\{f * g\} = L\{f(t)\}.L\{g(t)\} = F(s).G(s) \qquad (8.22)$$

$$L^{-1}\{F(s).G(s)\} = L^{-1}\{F(s)\} * L^{-1}\{G(s)\} = f(t) * g(t) \qquad (8.23)$$

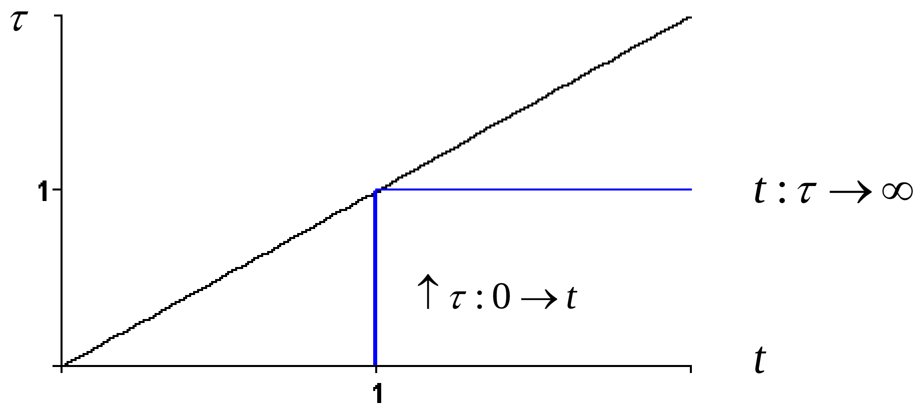
البرهان: لبرهان (8.22) نستخدم تعريف تحويل لابلاس و بعض خواص التكامل المتعدد لنحصل على

$$F(s).G(s)=\left(\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-s\upsilon}g(\upsilon)d\upsilon\right)$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(\tau+\upsilon)}f(\tau)g(\upsilon)d\tau\,d\upsilon$$
$$=\int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-s(\tau+\upsilon)}g(\upsilon)d\upsilon$$

باعتبار τ قيمة ثابتة بالنسبة للمتغير υ، نفرض $t=\tau+\upsilon$ فيكون $dt=d\upsilon$ و يؤول التكامل السابق إلى

$$F(s).G(s)=\int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-st}g(t-\tau)dt$$

بملاحظة الشكل (8.23) الآتي حيث المنطقة المثلثية التي نجري عليها التكامل



الشكل (8.23)

بما أن كلاً من f و g ذات اتصال متقطع على الفترة $[0,\infty)$ وذات رتبة أسية فيمكننا تبديل ترتيب التكامل لنحصل على

$$F(s).G(s)=\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}dt$$
$$=L\{f*g\}$$

أما برهان الجزء الثاني ، المعادلة (8.23)، فاستنتاجه يتم بشكل مباشر من الجزء الأول.

المثال (10): استخدم مبرهنة الالتفاف لأيجاد

أ- $L\{\int_0^t (t-\tau)\ e^{-\tau} d\tau\}$ ب- $L\{\int_0^t \sin(t-\tau)\ e^{\tau} d\tau\}$

الحل: باستخدام التعريف (8.9) والمبرهنة (8.13) نحصل على

أ- $$L\{\int_0^t (t-\tau)\ e^{-\tau} d\tau\} = L\{t * e^{-t}\} = L\{t\}.L\{e^{-t}\} = \frac{1}{s^2}.\frac{1}{s+1}$$

ب- $$L\{\int e^{\tau}\sin(t-\tau)\ d\tau\} = L\{\sin t * e^{t}\} = L\{\sin t\}.L\{e^{t}\} = \frac{1}{s^2+1}.\frac{1}{s-1}$$

المثال (11): استخدم مبرهنة الالتفاف لإيجاد

أ- $L^{-1}\{\frac{4}{s^2(s^2+4)}\}$ ب- $L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+4)^2}\}$

الحل:

أ- **بفرض** $G(s) = \frac{2}{s^2+4}\ ,\ F(s) = \frac{1}{s^2}$ **فإنّ**

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = t\ ,\ g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = \sin 2t$$

و عليه حسب المبرهنة (8.13) يكون

$$L^{-1}\{\frac{4}{s^2(s^2+4)}\} = 2L^{-1}\{F(s)\ G(s)\} = 2\int_0^t f(t-\tau)\ g(\tau)\ d\tau\}$$

$$= 2\int_0^t (t-\tau)\sin 2\tau\ d\tau$$

و باستخدام التكامل بالأجزاء نحصل على $L^{-1}\{\frac{4}{s^2(s^2+4)}\} = t + \frac{1}{2}\sin 2t$.

ب- **بفرض** $F(s) = \frac{1}{s^2+4}$ **فإنّ** $f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2}\sin 2t$

و عليه حسب المبرهنة (8.13) يكون

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+4)^2}\}=L^{-1}\{F(s)\ \ F(s)\}=\int_0^t f(t-\tau)\ \ f(\tau)\ \ d\tau\}$$
$$=\int_0^t \frac{1}{2}\sin 2(t-\tau).\frac{1}{2}\sin 2\tau\ \ d\tau$$

و باستخدام المتطابقة الهندسية $\sin B\sin A=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$ نحصل على

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+4)^2}\}=\frac{1}{4}\int_0^t \frac{1}{2}[\cos(4\tau-2t)-\cos 2t]\ \ d\tau\}$$
$$=\frac{1}{8}[\frac{\sin 2t}{2}-t\cos 2t]$$

المثال (12): استخدم تحويلات لابلاس و مبرهنة الالتفاف لحل مسألة القيم الابتدائية الآتية:

$$y''++y'+\frac{5}{4}y=1-f(t)\ \ ,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=-1\ ,$$
$$f(t)=\begin{cases}1\ , & 0\le t<\pi\\ 0\ , & \pi\le t<\infty\end{cases}$$

الحل: قبل إجراء تحويل لابلاس على المعادلة علينا كتابة $f(t)$ **بدلالة دالة درجية وحدوية حيث** $f(t)=1-U_\pi(t)$ **. و بذلك تؤول المعادلة الى**

$$s^2Y-s\ \ y(0)-y'(0)+sY-y(0)+\frac{5}{4}Y=\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}$$

وبالتعويض عن القيم الابتدائية و حل المعادلة بالنسبة للمتغير Y **نحصل على**

$$Y=\frac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+s+\frac{5}{4})}+\frac{s}{s^2+s+\frac{5}{4}}$$

لنفرض $H_1(s)=\frac{1}{s(s^2+s+\frac{5}{4})}\ \ ,\ \ H_2(s)=\frac{s}{s^2+s+\frac{5}{4}}$ **فإنّ حل المعادلة سيكون** $y=h_1(t)+h_1(t)U_\pi(t)+h_2(t)$ **، حيث** $h_i(t)=L^{-1}\{H_i(s)\}\ \ ,\ \ i=1,2$ **.**

لأيجاد $h_1(t)$ نفرض بأن $G_1(s)=\dfrac{1}{s^2+s+\frac{5}{4}}$, $F_1(s)=\dfrac{1}{s}$ فنحصل على

$$f_1(t)=L^{-1}\{F_1(s)\}=1 \ ,$$

$$g_1(t)=L^{-1}\{G_1(s)\}=L^{-1}\{\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+1}\}$$

$$=L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\Big|_{s\to s+\frac{1}{2}}\}=e^{-\frac{1}{2}t}\sin t$$

وعليه باستخدام مبرهنة الألتفاف تكون

$$h_1(t)=L^{-1}\{F(s)G(s)\}=f(t)*g(t)$$

$$=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\tau}\sin\tau\ d\tau$$

و باستخدام التكامل بالأجزاء نحصل على:

$$h_1(t)=\frac{2}{2-\pi}-2e^{-\frac{2}{2}t}\frac{2\cos t-\pi}{4-\pi^2}$$

أما $h_2(t)$ فنجدها كما يأتي:

$$h_2(t)=L^{-1}\{\frac{s}{(s+\frac{1}{2})^2+1}\}=l^{-1}\{\frac{s+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+1}\}$$

$$=L^{-1}\{\frac{s-\frac{1}{2}}{s^2+1}\Big|_{s\to s+\frac{1}{2}}\}=e^{-\frac{1}{2}t}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}\}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}t}[\cos t-\frac{1}{2}\sin t]$$

وبذلك يكون الحل

$$y=[\frac{2}{2-\pi}-2e^{-\frac{1}{2}t}\frac{2\cos t-\pi}{4-\pi^2}][1-U_\pi(t)]+e^{-\frac{1}{2}t}[\cos t-\frac{1}{2}\sin t]$$

8.4.4 تحويل لابلاس للتكامل (Laplace transform for integrals)

تعتبر مبرهنة الالتفاف مفيدة لحل المعادلات التكاملية والمعادلات التفاضلية - التكاملية. فإذا كان $g(t)=1$ و $L\{f(t)\}=F(s)$ فإنّ

$$\int_0^t f(\tau)d\tau=\int_0^t g(t-\tau)\,f(\tau)d\tau=f*g$$

ومنه نحصل على معادلتي لابلاس و لابلاس العكسي للتكامل

$$L^{-1}\{\frac{F(s)}{s}\}=\int_0^t f(\tau)d\tau \quad ، \quad L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\}=\frac{F(s)}{s} \qquad \textbf{(8.24)}$$

المثال (13): جد حل المعادلة التكاملية $f(t)+\int_0^t f(\tau)d\tau=1$

الحل: بفرض $F(s)=L\{f(t)\}$ **وإجراء تحويل لابلاس على المعادلة واستخدام المعادلة (8.24) نحصل على** $F(s)+\frac{F(s)}{s}=\frac{1}{s}$ **. وبحلها بالنسبة للدالة** $F(s)$ **يكون لدينا** $F(s)=\frac{1}{s+1}$ **، ومنها نحصل على حل المعادلة التكاملية** $f(t)=e^{-t}$ **.**

المثال (14): جد حل المعادلة التكاملية $f(t)=3t^2-e^{-t}-\int_0^t f(\tau)\;e^{t-\tau}d\tau$ **.**

الحل: بفرض $F(s)=L\{f(t)\}$ **وإجراء تحويل لابلاس على المعادلة واستخدام المعادلتين (8.22) و (8.24) نحصل على** $F(s)=3\frac{2!}{s^3}-\frac{1}{s+1}-F(s)\frac{1}{s-1}$ **. و بحل هذه المعادلة بالنسبة للدالة** $F(s)$ **يكون لدينا** $F(s)=\frac{6(s-1)}{s^4}-\frac{s-1}{s(s+1)}$ **، وبتجزئتها إلى كسور جزئية وتبسيطها تؤول الى** $F(s)=\frac{6}{s^3}-\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}$ **ومنها نحصل على حل المعادلة التكاملية** $f(t)=\frac{6}{2!}t^2-\frac{6}{3!}t^3+1-2e^{-t}$ **.**

المثال (15): جد حل المعادلة التفاضلية التكاملية

$$f'(t)=1-\sin t-\int_0^t f(\tau)\;d\tau \;,\quad f(0)=0\,.$$

الحل: بفرض $F(s)=L\{f(t)\}$ **وإجراء تحويل لابلاس على المعادلة نحصل على**

$$F(s) - f(0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{F(s)}{s}.$$

و بحل هذه المعادلة بالنسبة للدالة $F(s)$ يكون لدينا $F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{s}{(s+1)(s^2+1)}$ ،

وبتجزئتها الى كسور جزئية وتبسيطها تؤول الى

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}[\frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}]$$

ومنها نحصل على حل المعادلة

$$f(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}[\cos t - \sin t].$$

8.5 المخرجات التعليمية للفصل (Learning outcomes)

بعد الانتهاء من دراسة الفصل يكون الطالب قد أتقن المخرجات التعليمية الآتية:

1. **التعرف على العالم الرياضي لابلاس الذي أسهم في تطوير طريقة حل المعادلات التفاضلية باستخدام تحويلات لابلاس.**
2. **تطبيق تحويلات لابلاس على دوال من نمط معين.**
3. **تطبيق تحويلات لابلاس العكسي على دوال من نمط معين.**
4. **التمييز بين المسائل التي يمكن حلها بالطرق القياسية المباشرة والتي يستخرج فيها الحل باستخدام تحويلات لابلاس.**
5. **استخدام تحويلات لابلاس لحل معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى والثانية.**
6. **التعرف على المبرهنات الاساسية المتعلقة بتحويلات لابلاس ووجوده.**
7. **التمييز بين الدوال ذات إتصال متقطع وذات رتبة أسية.**
8. **حساب غاية تحويلات لابلاس.**
9. **استخدام تحويلات لابلاس للمشتقات في حل مسائل القيم الابتدائية.**
10. **استخدام خوارزمية لابلاس لحل مسائل القيم الإبتدائية الخطية ذات المعاملات الثابتة.**
11. **استخدام تحويلات لابلاس لحل المعادلات التفاضلية التي تعتمد على الدوال الدرجية و الدوال ذات الاتصال المتقطع .**
12. **تطبيق تحويلات لابلاس على الدوال الدورية و دالة ديراك- دلتا.**
13. **استخدام مبرهنة الالتفاف لحل معادلات تفاضلية وتكاملية.**
14. **المقدرة على استخدام القرص الممغنط المرافق للكتاب لمراجعة محتويات الكتاب والتعرف على أمثلة واقعية.**

تمارين الفصل الثامن

استخدم التعريف (8.1) لإيجاد تحويل لابلاس لكل من الدوال في المسائل من 1- 8 :

.1 $f(t)=e^{1-t}$ **.2** $f(t)=t^2$ **.3** $f(t)=e^{-t}\cos t$

.4 $f(t)=\begin{cases} 0 & , 0\le t<2 \\ 1 & , 2\le t<\infty \end{cases}$ **.5** $f(t)=\begin{cases} t+1 & , 0\le t<2 \\ 0 & , 2\le t<\infty \end{cases}$

.6 $f(t)=\begin{cases} \cos t & , 0\le t<\pi \\ 0 & , \pi\le t<\infty \end{cases}$ **.7** $f(t)=\begin{cases} -1 & , 0\le t<1 \\ 0 & , 1\le t<3 \\ 2 & , 3\le t<\infty \end{cases}$

.8 $f(x)=\begin{cases} 2 & , 0\le t<2 \\ t & , 2\le t<4 \\ t^2 & , 4\le t<\infty \end{cases}$

لكل من الدوال في المسائل من 9- 14، بين فيما إذا كانت أ- ذات اتصال متقطع ، ب- ذات رتبة أسية.

.9 $f(t)=te^{5t}$ **.10** $f(t)=e^{t^2-t}$ **.11** $f(t)=t^5\sin t$

.12 $f(t)=\begin{cases} \ln(1-t) & , 0\le t<1 \\ t-1 & ,1\le t<\infty \end{cases}$ **.13** $f(t)=\begin{cases} e^{2t} & , 0\le t<5 \\ e^{-t^2} & ,5\le t<\infty \end{cases}$

.14 $f(t)=\begin{cases} \sin t & 0\le t<\pi \\ t\cos t & \pi\le t<2\pi \\ t^2\sin t & 2\pi\le t<\infty \end{cases}$

استخدم المبرهنة (8.4) لإيجاد تحويل لابلاس لكل من الدوال في المسائل من 15- 24 :

.15 $f(t)=t^5$ **.16** $f(t)=e^{4t}$

.17 $f(t)=2\cos 3t-3\sin 2t$ **.18** $f(t)=(1+t)^3$

.19 $f(t)=(e^t-e^{-t})^2$ **.20** $f(t)=\cos^2 3t$

.21 $f(t)=e^t\cosh t$ **.22** $f(t)=(1-\sqrt{t})^2$

.23 $f(t)=2\cosh t-5\sinh 2t$ **.24** $f(t)=\sin^2 5t$

لكل من الدوال في المسائل من 25- 30 ، بيّن فيما إذا كان تحويل لابلاس العكسي موجودا. و في حالة الإجابة بنعم استخدم المبرهنة (8.4) لإيجاده.

.25 $F(s)=\dfrac{1}{2s+1}$ **.26** $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+s}$ **.27** $F(s)=\dfrac{1+s^2}{2+s}$

.28 $F(s)=\dfrac{2s-1}{s^2-4}$ **.29** $F(s)=\dfrac{2\pi}{\sqrt{s}}$ **.30** $F(s)=\dfrac{2s}{5s^2+1}$

إستخدم المبرهنة (8.7) لإيجاد تحويل لابلاس لكل من الدوال في المسائل 31- 36:

.31 $f(t)=\begin{cases}1 & , 0\le t<1\\ 0 & , 1\le t<\infty\end{cases}$ **.32** $f(t)=\begin{cases}0 & , 0\le t<\pi\\ \sin t & , \pi\le t<\infty\end{cases}$

.33 $f(t)=\begin{cases}\cos 2t & , 0\le t<\pi\\ 0 & , \pi\le t<\infty\end{cases}$ **.34** $f(t)=\begin{cases}t^2 & , 0\le t<3\\ 0 & , 3\le t<\infty\end{cases}$

.35 $f(x)=\begin{cases}2 & , 0\le t<2\\ 1 & , 2\le t<4\\ -1 & , 4\le t<\infty\end{cases}$ **.36** $f(x)=\begin{cases}0 & , 0\le t<\pi/2\\ \sin t & , \pi/2\le t<2\pi\\ \cos t & , 2\pi\le t<\infty\end{cases}$

اختبر دورية كل من الدوال في المسائل 37- 40 ثم جد طول الدورة و تحويل لابلاس لها وارسمها.

.37 $f(t)=\begin{cases}0 & , 0\le t<1\\ 1 & , 1\le t<2\end{cases}$ حيث $f(t+2)=f(t)$

.38 $f(t)=\begin{cases}1 & , n\le t<n+2\\ 0 & , n+2\le t<n+3\end{cases}$ للقيم $n=0,\ 3,\ 6,\ \Lambda$

.39 $f(t)=|\sin t|$ حيث $0\le t$

40. $f(t)=n,\ \ n\le t<n+1$ للقيم $n=0,\ 1,\ 2,\ \Lambda$

استخدم طريقة تجزئة الكسور ومبرهنتي الانتقال لإيجاد تحويل لابلاس العكسي لكل من الدوال في المسائل من 41 – 50 :

41. $F(s)=\dfrac{s}{s^2+4s+-5}$ ،

42. $F(s)=\dfrac{2s-4}{(s^2+s)(s^2+1)}$ ،

43. $F(s)=\dfrac{s-1}{s^2-4s}$

44. $F(s)=\dfrac{5}{(s+1)^5}$ ،

45. $F(s)=\dfrac{1}{s^2+s}$ ،

46. $F(s)=\dfrac{(1+s)^2}{s^4}$

47. $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s^3}$ ،

48. $F(s)=\dfrac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}$ ،

49. $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{(s+2)^4}$

50. $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2-4s+4}$

استخدم تحويلات لابلاس و لابلاس العكسي لحل مسائل القيم الابتدائية من 51 - 68 :

51. $\dfrac{dy}{dt}+y=2\,,\ y(0)=0$

52. $\dfrac{dy}{dt}-y=2\cos 5t\,,\ y(0)=0$

53. $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=1,\ y(0)=0\,,\ y'(0)=0$

54. $y''-y'-6y=0\,,\ y(0)=2\,,\ y'(0)=-1$

55. $y''+4y=\sin 3t\,,\ y(0)=0\,,\ y'(0)=0$

56. $y''+3y'+2y=t\,,\ y(0)=0\,,\ y'(0)=2$

57. $y''+6y'+25y=0\,,\ y(0)=2\,,\ y'(0)=3$

58. $y'''+y''-6y'=0\,,\ y(0)=0\,,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1$

59. $y''+4y=f(t)\,,\ y(0)=0\,,\ y'(0)=-1,\ f(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ 0 & 1\le t<\infty\end{cases}$

$$y' + y = f(t)\,,\ y(0) = 5\,,\ \ f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < \pi \\ 3\cos t & \pi \le t < \infty \end{cases}$$ .60

$$y'' + 4y = f(t)\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0\,,\ f(t) = \begin{cases} \cos t & 0 \le t < 2\pi \\ 0 & 2\pi \le t < \infty \end{cases}$$ .61

$$y'' + y = f(t)\,,\ \ y(0) = 0\,,\ \ y'(0) = 1\,,\ \ f(t) = \begin{cases} 0 & ,\ 0 \le t < \pi \\ 1 & ,\ \pi \le t < 2\pi \\ 0 & ,\ 2\pi \le t < \infty \end{cases}$$ .62

.63

$$y'' + y = f(t)\,,\ y(0) = y'(0) = 0\,,$$

$$f(t) = \begin{cases} 2\sin t\ , & 0 \le t < \pi \\ 0\ , & \pi \le t < 2\pi \end{cases}\ ,\ \ f(t + 2\pi) = f(t),\ \ t \ge 0$$

.64

$$y'' + 11y' + 30y = f(t)\,,\ \ y(0) = -2\,,\ \ y'(0) = 0\,,$$

$$f(t) = \begin{cases} 1\ , & 0 \le t < 1 \\ 2\ , & 1 \le t < 2 \end{cases}\ ,\ \ f(t + 2) = f(t),\ \ t \ge 0$$

$$y'' + 4y = \delta(t)\,,\ y(0) = y'(0) = 0$$ .65

$$y'' + 2y' + 2y = 2\delta(t - \pi)\,,\ y(0) = y'(0) = 0$$ .66

$$y'' + 4y = \delta(t) + \delta(t-\pi)\,,\ y(0) = y'(0) = 0$$ .67

$$y'' + 2y' + 26y = \delta(t - 4)\,,\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$$ .68

استخدم الطرائق والمبرهنات المناسبة لإيجاد التحويلات في المسائل من 69- 80 :

.69 $L\{t\cosh t\}$ ، **.70** $L\{t^3 e^{-2t}\}$ ، **.71** $L\{t^2 \sin 3t\}$ ،

.72 $L\{\dfrac{\sinh t}{t}\}$ ، **.73** $L^{-1}\{\dfrac{2s}{(s^2 - 1)^2}\}$ ، **.74** $L\{t^2 \sinh t\}$ ،

.75 $L\{\delta(t) - \delta(t - \pi)\}$ **حيث** δ **تمثل دالة ديراك – دلتا،** **.76** $L\{\sin t * \cos t\}$

.77 $L\{t^3 * \sinh t\}$ ، **.78** $L\{\int_0^t e^{2(t-\tau)} \cos \tau d\tau\}$ **.79** $L^{-1}\{\dfrac{1}{s^3(s - 1)}\}$

80. $L^{-1}\{\tan^{-1}\frac{1}{s}\}$ **(تمهيد: بين أولا بأن** $L^{-1}\{F(s)\} = \frac{-1}{t} L\{F'(s)\}$ **)**

استخدم تحويلات لابلاس الملائمة لحل المعادلات التكاملية و التفاضلية - التكاملية في المسائل من 81 - 86 :

81. $f(t) - te^{t} = \int_0^t \tau \, f(t-\tau)\, d\tau$

82. $f(t) = \cos t + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau)\, d\tau$

83. $f(t) - 1 = t - \frac{8}{3} + \int_0^t (\tau - t)^3 f(\tau)\, d\tau$

84. $f(t) = 1 - \sin t - \int_0^t f(\tau)\, d\tau$

85. $f'(t) + 6f(t) + 9\int_0^t f(\tau)\, d\tau = 1,\ f(0) = 0$