# الفصل التاسع

## حلول منظومات المعادلات التفاضلية الاعتيادية

## Solutions of systems of ordinary differential equations

### 9.1 منظومات مسائل القيم الابتدائية (Systems of IVPs)

في الفصول السابقة عالجنا مسائل القيم الابتدائية المكونة من معادلة تفاضلية واحدة ذات شرط ابتدائي في نقطة معينة. و في مجالات عديدة قد نواجه بمنظومة من المعادلات التفاضلية مع شروط عند نقطة واحدة أو نقاط مختلفة. فإذا كان لدينا $m$ من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى وكل معادلة تحتوي على $m$ من الدوال $y_1, y_2, \ldots, y_m$ جميعها تعتمد على المتغيرالمستقل $x$ يمكن كتابة منظومة المعادلات كالآتي:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ &\vdots \\ y_m' &= f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{aligned} \qquad \textbf{(9.1)}$$

وإذا كان المطلوب تحقيق الدوال $(j = 1,\ 2,\ 3, \Lambda\ m)$ $y_j$ جميعها قيما معينة عند نقطة واحدة $a$، أي

$$y_1(a) = \eta_1, \quad y_2(a) = \eta_2,\ \ldots, y_m(a) = \eta_m \qquad \textbf{(9.2)}$$

حيث $(j = 1,\ 2,\ 3, \Lambda\ m)$ $\eta_j$ ثوابت حقيقية، فان المسألة حينذاك تسمى بمنظومة معادلات تفاضلية ذات قيم ابتدائية أو باختصار منظومة قيم ابتدائية. أما إذا كانت الشروط مطلوباً تحقيقها عند نقاط مختلفة فتسمى عندئذ بمنظومة قيم حدودية. فعلى سبيل المثال تكون المعادلتين

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, y), \quad x(a) = \eta \\ y' &= g(t, x, y), \quad y(b) = \mu \end{aligned}$$

منظومة قيم حدودية بنقتطين حيث $t$ المتغير المستقل و $\{x(t),\ y(t)\}$ مجموعة دوال الحل.

سنقتصر في هذا الفصل على دراسة منظومات القيم الابتدائية وطرائق حلها، أما المنظومات الحدودية فدراستها خارج نطاق كتابنا هذا.

من الجدير بالذكر أن مسائل القيم الابتدائية من الرتب العليا التي يمكن كتابتها بالصيغة

$$\begin{aligned} & y^{(m)} = f(x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(m-1)}), \\ & y(a) = \mu_1,\ \ y'(a) = \mu_2,\ \dots,\ \ y^{(m-1)}(a) = \mu_m \end{aligned}$$

يمكن تحويلها الى منظومات قيم ابتدائية مكافئة من الرتب الأولى وذلك بفرض

$$y_1 = y,\ \ y_2 = y',\ \dots,\ \ y_{m-1} = y^{(m)},\ \ y_m = y^{(m-1)}$$

فتؤول المعادلة السابقة الى المنظومة

$$\begin{array}{lcl} y_1' = y_2 & , & y_1(a) = \mu_1 \\ y_2' = y_3 & , & y_2(a) = \mu_2 \\ \quad\vdots & , & \quad\vdots \\ y_{m-1}' = y_m & , & y_{m-1}(a) = \mu_{m-1} \\ y_m' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_m) & , & y_m(a) = \mu_m \end{array}$$

وهي كما ترى جميع المعادلات فيها من الرتبة الأولى.

**المثال (1):** اكتب مسألة القيم الابتدائية من الرتبة الثالثة

$$y''' = xy - y' + 2y'',\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 2,\ \ y''(0) = 1$$

على شكل منظومة قيم ابتدائية من الرتبة الأولى

**الحل:** بفرض $y_1 = y,\ \ y_2 = y',\ \ y_3 = y''$

فتؤول المعادلة السابقة الى منظومة القيم الابتدائية من الرتبة الأولى

$$\begin{array}{lcl} y_1' = y_2 & , & y_1(0) = -1 \\ y_2' = y_3 & , & y_2(0) = 2 \\ y_3' = xy_1 - y_2 + 2y_3 & , & y_3(0) = 1 \end{array}$$

لاحظ أنّ $y_1(x)$ هو حل مسألة القيم الابتدائية، أما $y_2(x),\ \ y_3(x)$ فليس لدينا حاجة لهما.

**المثال (2):** أكتب منظومة القيم الابتدائية من الرتبة الثانية

$$x' = x + y - t,\ \ x(1) = 2$$

$$y'' = x - 3y - y' + t^2,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 3$$

على شكل منظومة قيم ابتدائية من الرتبة الأولى

الحل: بفرض $y_1 = x,\ \ y_2 = y,\ \ y_3 = y'$

فتؤول المنظومة السابقة الى منظومة القيم الابتدائية من الرتبة الأولى:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 - t \qquad &,\quad y_1(0) = 2 \\ y_2' &= y_3 &,\quad y_2(0) = 1 \\ y_3' &= y_1 - 3y_2 - y_3 + t^2 &,\quad y_3(0) = 3 \end{aligned}$$

لاحظ أنّ المجموعة $\{y_1(t),\ \ y_2(t)\}$ تمثل حل المنظومة الأولى، أما $y_3(t)$ فليس لدينا حاجة بها فهي تمثل $y_2'(t)$ .

لتسهيل مهمة تعميم المفاهيم والمبرهنات والطرائق التي تطرقنا إليها بالنسبة لمسائل القيم الابتدائية ذات المعادلة الواحدة يمكن استخدام رموز المتجهات للتعبير عن المنظومة (9.1) والشروط الابتدائية (9.2) كالآتي:

$$Y' = F(x,Y), \qquad Y(a) = \eta \tag{9.3}$$

حيث
$$Y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m)^T,\ \ \eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots, \eta_m)^T$$
$$F : [a,b] \times R^m \to R^m,\ \ F \equiv (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T$$

أما حل منظومة القيم الابتدائية (9.3) فهو عبارة عن مجموعة الدوال :

$$y_1(x),\ \ y_2(x),\ \ \ldots,\ \ y_m(x)$$

التي تحقق المعادلات التفاضلية (9.1) والشروط الابتدائية (9.2)، و بصيغة المتجهات يعبر عنه بالشكل

$$Y(x) = (y_1(x),\ \ y_2(x),\ \ \ldots,\ \ y_m(x))^T$$

ويسمى متجه الحل.

المثال (3) : أثبت أنّ مجموعة الدالتين $\left\{y_1(x) = x+1,\ \ y_2(x) = \dfrac{1}{x+1}\right\}$ تمثل الحل لمنظومة القيم الابتدائية :

$$\begin{aligned} y_1' &= (x+1)y_2, \qquad & y_1(0) = 1 \\ y_2' &= -y_2 / y_1, & y_2(0) = 1 \end{aligned}$$

ثم ارسم

أ- دوال الحل $\{y_1(x),\ \ y_2(x)\}$ على المستوى - $xy$ .

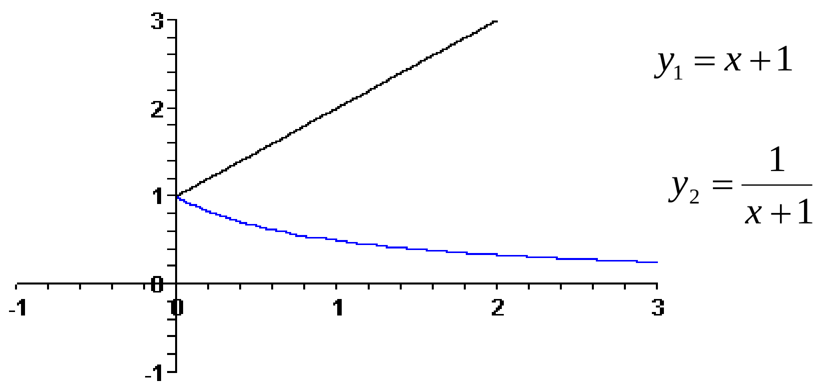
**ب- منحني الحل معلميا بشكل $\{(y_1(x), y_2(x)):\ 0 \le x \le 10\}$ على المستوى - $y_1y_2$ مع بيان اتجاه الحركة على المنحني.**

**الحل: بتعويض الدالتين في المنظومة يكون لدينا**

$$1 = (x+1).\frac{1}{x+1}, \qquad 0+1=1$$
$$\frac{-1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} \div (x+1), \quad \frac{1}{0+1} = 1$$

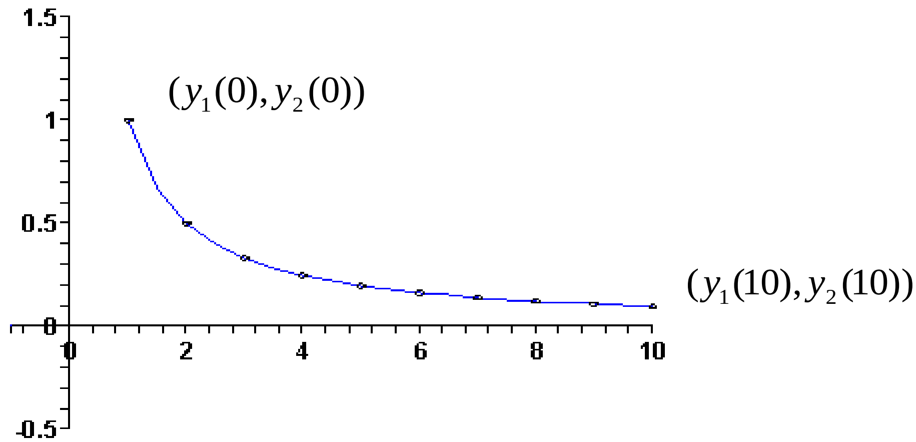
**و كما هو واضح كلها عبارات صادقة، أي أن الدالتين تشكلان حل منظومة القيم الابتدائية.**

**أ- الشكل (9.1) يمثل الرسم البياني لدالتي الحل** $\left\{y_1(x) = x+1,\ \ y_2(x) = \dfrac{1}{x+1}\right\}$




**الشكل (9.1)**

**ب- الشكل (9.2) يمثل الرسم البياني لمنحني الحل معلميا بشكل $\{(y_1(x), y_2(x))\}$ للقيم $0 \le x \le 10$ على المستوي - $y_1y_2$.**




**الشكل (9.2)**

**نلاحظ من خلال تحرك النقاط $\{(y_1, y_2)\}$ عندما تزداد قيم المعلمة $x$ أنّ قيم $y_1$ تزداد وقيم $y_2$ تتناقص باتجاه الصفر. أي أن حركة النقاط من الأعلى للأسفل و من اليسار لليمين، كما هو مؤشر بالشكل (9.2).**

**المثال (4) : جد حل منظومة القيم الابتدائية**

$$y_1' = 2e^x \quad , \quad y_1(0) = 1$$
$$y_2' = -{y_2}^2 , \quad y_2(0) = -1$$

**الحل: بما أن المعادلتين منفصلتان نستطيع حل كل منهما على حدة.**

**من المعادلة الأولى نحصل على** $y_1 = \int 2e^x dx = 2e^x + c_1$ **وبأستخدام الشرط الابتدائي للمتغير $y_1$ يكون لدينا $1 = 2 + c_1$، أي أن $c_1 = -1$.**

**أما المعادلة الثانية فبفصل المتغيرات تؤول الى** $\dfrac{dy_2}{{y_2}^2} = -dx$ **، وبإجراء التكامل نحصل على** $\dfrac{-1}{y_2} = -x + c_2$ **وباستخدام الشرط الابتدائي للمتغير $y_2$ يكون لدينا** $\dfrac{-1}{-1} = -0 + c_2$**، أي أن $c_2 = 1$. وبالتالي نحصل على مجموعة الحل لمنظومة القيم الابتدائية :** $y_1 = 2e^x - 1, \ y_2 = \dfrac{1}{x-1}$

**أو متجه الحل**
$$Y = \begin{pmatrix} 2e^x - 1 \\ 1/(x-1) \end{pmatrix}$$

**المثال (5) : جد حل منظومة القيم الابتدائية**

$$\begin{aligned} x' &= y, & x(0) &= -2 \\ y' &= -x+1, & y(0) &= 1 \end{aligned}$$

**وذلك بحل مسألة القيم الابتدائية من الرتبة الثانية المكافئة لها.**

**الحل: باشتقاق المعادلة الأولى بالنسبة للمتغير المستقل** $x$ **نحصل على** $x'' = y'$ **وبالتعويض في المعادلة الثانية تؤول المنظومة الى مسألة القيم الابتدائية من الرتبة الثانية والمكافئة لها**

$$x'' = -x+1, \quad x(0) = -2, \quad x'(0) = 1$$

**وهي مسألة قيم ابتدائية خطية غيرمتجانسة بمعاملات ثابتة. باستخدام طرائق الفصل الخامس يستطيع الطالب**

**أن يجد حلها** $x = -3\cos t + \sin t + 1$ **ومنها** $y = x' = 3\sin t + \cos t$ **أي أن متجه الحل هو**

$$.Y = \begin{pmatrix} 3\cos t + \sin t + 1 \\ 3\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

**بشكل عام ليس من السهل إيجاد الحلول لمنظومات القيم الابتدائية على شكل دوال صريحة للمتغيرالمستقل ولكن في بعض الحالات يكون الأمر ممكنا، فعلى سبيل المثال إذا كانت منظومة المعادلات التفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الأولى، أي بالصيغة:**

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1m}y_m \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2m}y_m \\ &\vdots \\ y_m' &= a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mm}y_m \end{aligned} \qquad \textbf{(9.4)}$$

**والتي يمكن كتابتها بصيغة الممصفوفات**

$$Y' = AY \qquad \textbf{(9.5)}$$

**أو إذا كانت منظومة خطية غير متجانسة بالصيغة**

$$Y' = AY + F(x) \qquad \textbf{(9.6)}$$

**فهناك طرائق عامة لحلها.**

## 9.2 منظومات المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة

**(Systems of first order liner homogenous DEs with constant coefficients)**

**قبل البدء بتعميم المبرهنات والنتائج التي تناولناها فى الفصل الرابع بخصوص المعادلات الخطية المتجانسة سنفترض كما أشرنا سابقا، أنّ الطالب ملم بأساسيات المصفوفات وطرائق إيجاد القيم الذاتية و المتجهات الذاتية المقترنة بها، و كذلك المحددات وأساليب إيجاد مفكوكها. وسنكتفي هنا باستعراض التعاريف والمبرهنات الأساسية من دون التطرق للبراهين.**

**التعريف (9.1): يقال لمجموعة المتجهات $\{Y_r(x)\}_{r=1}^{m}$ أنّها مستقلة خطيا على فترة $I$ إذا تحقق ما يأتي:**

$$\sum_{r=1}^{m} a_r Y_r(x) = 0, \quad \forall x \in I \Rightarrow a_1 = a_2 \ldots = a_m = 0$$

**ويقال أنّها معتمدة خطياً على الفترة $I$ إذا أمكن التعبير عن إحدى هذه المتجهات كتركيب خطي من بقية المتجهات في المجموعة نفسها على تلك الفترة.**

**المبرهنة الآتية توفر طريقة سهلة لاختبار الاستقلال الخطي لمتجهات الحل لمنظومات المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة (9.5).**

**المبرهنة (9.1): لتكن $\{Y_r(x)\}_{r=1}^{m}$ متجهات حل للمنظومة الخطية المتجانسة (9.5) على الفترة المفتوحة $I$ . فإذا كان محدد رونسكيان لا يساوي صفرا عند نقطة واحدة على الأقل تنتمي الى الفترة $I$، أي**

$$W\big(Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_m(x)\big) = \begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) & \ldots & Y_m(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

**فعندئذٍ تكون المتجهات $Y_1(x)$، $Y_2(x)$، ...، و $Y_m(x)$ مستقلة خطياً على الفترة $I$ .**

**المبرهنة (9.2): لتكن: $Y_1(x)$، $Y_2(x)$، ...، و $Y_m(x)$ متجهات حل للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (9.5) على الفترة المفتوحة $I$ . فعندئذٍ يكون التركيب الخطي:**

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x) + \ldots + c_m Y_m(x),$$

**حلاً على الفترة نفسها، حيث إنّ $c_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$ ثوابت اختيارية.**

**التعريف (9.2): المجموعة الأساسية للحلول (Fundamental set of solutions)**

تسمى أية مجموعة $\{Y_1(x),\ Y_2(x),\ ...,\ Y_m(x)\}$ ، مكونة من $m$ من المتجهات المستقلة خطياً لحل المنظومة (9.5) على الفترة المفتوحة $I$ ، والمكونة من $m$ من المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ، بالمجموعة الأساسية للحلول على تلك الفترة.

المبرهنة الآتية توضح علاقة الحل العام بالمجموعة الأساسية لحلول منظومات المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة.

**المبرهنة (9.3): الحل العام (General solution)**

لتكن $\{Y_1(x),\ Y_2(x),\ ...,\ Y_m(x)\}$ المجموعة الأساسية لحلول منظومة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة (9.5) على الفترة $I$ . عندئذٍ يكون الحل العام للمنظومة على الفترة نفسها :

$$Y(x) = c_1Y_1(x) + c_2Y_2(x) + ... + c_mY_m(x),$$

حيث إنّ $c_i\ (i = 1,2,..., \mathrm{m})$ ثوابت اختيارية.

المبرهنة (9.3) تعني أنّه إذا كان $Y(x)$ هو أي حل للمنظومة (9.5) على الفترة $I$ ، فعندئذٍ يمكننا إيجاد الثوابت: $C_1$ ، $C_2$ ، ... ، و $C_m$ بحيث:

$$Y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + ... + C_mY_m(x).$$

بعبارة أخرى، إذا كانت $\{Y_1(x),\ Y_2(x),\ ...,\ Y_m(x)\}$ تمثل مجموعة متجهات حل للمنظومة المتجانسة (9.5) على فترة مفتوحة $I$ وكانت مجموعة المتجهات مستقلة خطيا، تسمى $\{Y_r\}$ بمجموعة متجهات حلول أساسية. بذلك تشكل هذه المجموعة أساسا لفضاء متجهات الحلول وإنّ الحل العام للمعادلة (9.5) يمكن كتابته كتركيب خطي من مجموعة الحلول الأساسية.

**المثال (1) : لتكن لدينا منظومة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة**

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} Y$$

**أ) تحقق من أن كلاً من المتجهات الآتية هو حل للمنظومة على الفترة $R$ :**

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -e^{5x} \\ 2e^{5x} \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} -2e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

ب) أثبت أنّ $\{Y_1,\ Y_2\}$ يكونان مجموعة الحلول الأساسية للمنظومة على الفترة $I=[-\infty,\infty]$ .

ج) جد الحل العام للمنظومة.

د) جد الحل الذي يحقق القيم الابتدائية $Y(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$، ثم ارسم دوال الحل على المستوى - $xy$ .

ه) ارسم الحقل الاتجاهي للمنظومة على المنطقة $[-10,10]\times[-10,10]$ مع الرسم المعلمي لقيم الحل $\{(y_1,y_2)\}$ .

الحل: أ- بتعويض الدالتين في المنظومة يكون لدينا

$$\begin{bmatrix}-5e^{5x}\\10e^{5x}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\2&6\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-e^{5x}\\2e^{5x}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-5e^{5x}\\10e^{5x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5e^{5x}\\10e^{5x}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-4e^{2x}\\2e^{2x}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\2&6\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-2e^{2x}\\e^{2x}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-4e^{2x}\\2e^{2x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4e^{2x}\\2e^{2x}\end{bmatrix}$$

يتبين أنّ كلها عبارات صادقة، أي أن المتجهين يعتبران حلين لمنظومة القيم الابتدائية.

ب- علينا إثبات أن رونسكيان للحلين لا يساوي صفرا عند نقطة واحدة على الأقل تنتمي الى الفترة $I$ ، ولتكن القيمة المختارة $x=0$ ، أي

$$W\left(Y_1(0),Y_2(0)\right)=\begin{vmatrix}-1&-2\\2&1\end{vmatrix}=3\neq 0$$

و بذلك يكون المتجهان $Y_1(x)$،$Y_2(x)$ مستقلين خطياً على الفترة $I=[-\infty,\infty]$،أي أن $\{Y_1,\ Y_2\}$ يكونان مجموعة الحلول الأساسية للمنظومة على الفترة $I$ .

ج- الحل العام للمنظومة هو

$$Y(x)=k_1Y_1+k_2Y_2=k_1\begin{pmatrix}-e^{5x}\\2e^{5x}\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2e^{2x}\\e^{2x}\end{pmatrix}$$

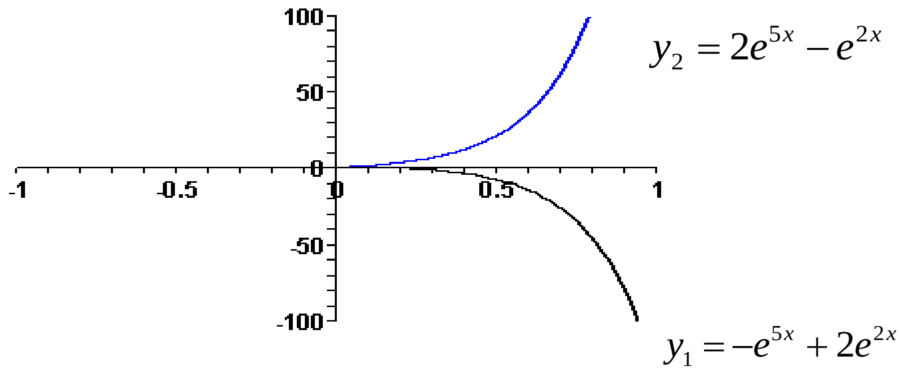
د- بتعويض القيم الابتدائية في الحل العام نحصل على المعادلتين الخطيتين:

$$-k_1+-2k_2=1$$
$$2k_1\ +\ k_2\ =1$$

و بحلهما آنيا نحصل على القيم $k_1 = 1 \ , \ k_2 = -1$. وبذلك يكون متجه الحل الذي يحقق القيم الابتدائية المعطاة

$$Y(x) = (1)\begin{pmatrix} -e^{5x} \\ 2e^{5x} \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -2e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{5x} + 2e^{2x} \\ 2e^{5x} - e^{2x} \end{pmatrix}$$

وفي ما يأتي رسم دوال الحل $\left\{ y_1(x) = -e^{5x} + 2e^{2x} \ , \ y_2(x) = 2e^{5x} - e^{2x} \right\}$ على المستوى- $xy$.

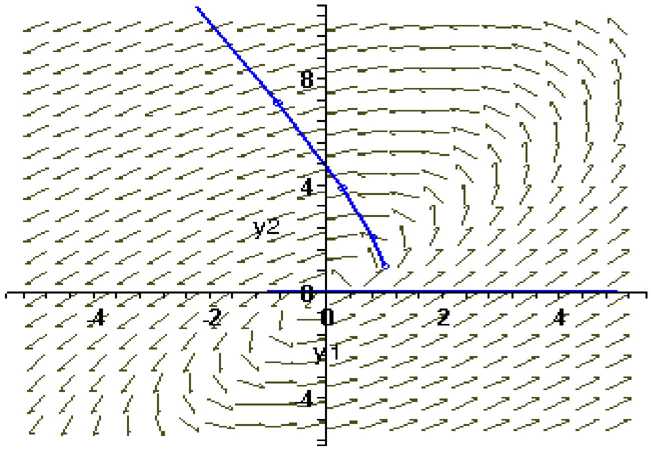



**الشكل (9.3)**

هـ - الشكل (9.4) يمثل الحقل الاتجاهي لمنظومة القيم الابتدائية مع الرسم البياني لمنحني الحل معلميا بشكل $\{(y_1(x), y_2(x))\}$ للقيم $0 \le x \le 10$ على المستوى - $y_1y_2$ حيث تمثل

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{dy_2/dx}{dy_1/dx}$$

ميل الإتجاهات للقيم المختلفة للمتغير المستقل $x$. ونلاحظ من خلاله توافق الاتجاهات مع اتجاهات المنحنى المعلمي للحل. جد نقاط الحل عند القيم $x = 0, \ 0.1, \ 0.2$ .




**الشكل (9.4)**

بعد ذكرنا للتعاريف والمبرهنات المتعلقة بمتجهات الحل للمنظومات الخطية المتجانسة $Y' = AY$ ، حيث $A$ مصفوفة مربعة ذات أبعاد $m \times m$ ، أي

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

سنتناول في هذا البند الطرائق التي تعتمد على القيم الذاتية و المتجهات الذاتية للمصفوفة $A$ لإيجاد الحل العام لهذه المنظومات.

**التعريف (9.3) : القيم الذاتية والمتجهات الذاتية (Eigenvalues and Eigenvectors)**

يقال للمتجه غير الصفري $V$ أنّه متجه ذاتي للمصفوفة المربعة $A_{m\times m}$ إذا وجد عدد $\lambda$ ، يسمى قيمة ذاتية للمصفوفة $A$ ، بحيث

$$AV = \lambda V \qquad \textbf{(9.6)}$$

واستنادا لهذا التعريف نلاحظ أنّ المتجه الصفري $V = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0)^T$ لا يمكن أن يكون متجها ذاتيا لأية مصفوفة.

**لإيجاد القيم الذاتية و المتجهات الذاتية للمصفوفة $A$ علينا كتابة المعادلة (9.6) بالصيغة المكافئة**

$$(A-\lambda I)V=0 \qquad \textbf{(9.7)}$$

**حيث $I$ هي مصفوفة الوحدة بالبعد $m$ ، أي**

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 1 & \Lambda & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & \Lambda & 1 \end{pmatrix}$$

**و للحصول على حل غير صفري للمنظومة الخطية المتجانسة (9.7) يجب أن يكون محدد مصفوفة المعاملات مساويا للصفر، أي أن**

$$|A-\lambda I|=0 \qquad \textbf{(9.8)}$$

**وعند استخدام مفكوك المحدد ستؤول المعادلة (9.8) الى حدودية من الدرجة $m$ جذورها القيم الذاتية للمصفوفة $A$ . و بعد إيجاد القيم الذاتية التي سيكون عددها على الأكثر $m$ ، نستطيع إيجاد متجهات ذاتية مرتبطة بها و ذلك بتعويض القيم الذاتية في المعادلة (9.7) و حلها بشكل متعاقب.**

**المثال (2): جد القيم الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ ومن ثم متجهات ذاتية مرتبطة بها.**

**الحل:**

**لإيجاد الحل العام علينا إيجاد القيم الذاتية لمصفوفة المعاملات $A=\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ أولا، وذلك بحل**

**معادلة المحدد:**

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -7-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(-7-\lambda)(-1-\lambda)-(-8)=\lambda^2+8\lambda+15=0$$

**لنحصل على** $\lambda_1=-5,\ \lambda_2=-3$ ، و من ثم نجد متجهات ذاتية مرتبطة بالقيم الذاتية و ذلك بحل

المنظومة الخطية $(A-\lambda I)V=0$ لكل من القيم الذاتية.

$$\lambda_1 = -5 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باستخدام العمليات الابتدائية على صفوف المنظومة ستؤول المنظومات الى

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} -\beta/2 \\ \beta \end{bmatrix}$$

**و باختيارقيمة مناسبة مثل $\alpha = 1,\ \beta = 2$ نحصل على المتجهين الذاتيين :**

$$\lambda_1 = -5,\ V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ، \quad \lambda_2 = -3,\ V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## 9.3 حلول المنظومات الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة:

**(Solutions of systems of 1st order liner homogenous DE with constant coefficients)**

**قبل الكلام عن طريقة إيجاد الحل العام للمنظومات الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة، المعادلة (9.5) ، سنبدأ أولا بإعطاء الصيغة العامة لمتجهات الحل.**

**متجهات الحل**

**إذا كانت $\lambda$ قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة $A$ و $V$ متجه ذاتي مرتبط بها فأن $Y = Ve^{\lambda x}$ هو متجه حل للمنظومة $Y' = AY$.**

**و لاثبات ذلك نقوم بتعويض متجه الحل في المنظومة التفاضلية لنحصل على**

$$\lambda Ve^{\lambda x} = AVe^{\lambda x}$$

**و هي عبارة صحيحة لأن $\lambda$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A$ و $V$ متجه ذاتي مرتبط بها.**

**استنادا الى طبيعة القيم الذاتية للمصفوفة $A$ سنناقش الحالات عندما تكون جميعها مختلفة، حقيقية أو عقدية، وعندما يكون بعضها مكررا.**

**<u>قيم ذاتية حقيقية مختلفة</u>**

**إذا كان للمصفوفة $A$ القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_m$ وكانت جميعها حقيقية ومختلفة، فأن مجموعة المتجهات الذاتية $V_1,\ V_2,\ \ldots\ ,\ V_m$ المرتبطة بالقيم الذاتية على التوالي تكون مجموعة مستقلة خطيا و عليه تكون مجموعة المتجهات $\left\{Y_r(x) = V_r e^{\lambda_r x}\right\}_{r=1}^{m}$ أساسا لمجموعة الحلول للمنظومة (9.5) ، ومنها نحصل على الحل العام لها**

$$Y(x) = \sum_{r=1}^{m} k_r V_r e^{\lambda_r x} \qquad \textbf{(9.9)}$$

**حيث $\{k_r\}_{r=1}^{m}$ أية مجموعة من الثوابت. وإذا كان للمسألة الشروط الابتدائية $\{y_r(a) = \eta_r\}_{r=1}^{m}$ فإن لهذه الثوابت قيماً وحيدة.**

**المثال (1) : جد متجه حل منظومة القيم الابتدائية**

$$Y' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} Y \qquad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**ثم ارسم دوال الحل على الفترة $[0,2]$.**

**الحل: لإيجاد الحل العام علينا إيجاد القيم الذاتية لمصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ أولا، وذلك بحل معادلة المحدد**

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$$

**لنحصل على** $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 6$ ، و من ثم نجد متجهات ذاتية مرتبطة بالقيم الذاتية و ذلك بحل المنظومة الخطية $(A - \lambda I)V = 0$ لكل من القيم الذاتية.

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_1 = 0 \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 6 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 3\alpha/4 \end{bmatrix}$$

**باختيار قيمة مناسبة مثل $\alpha = 4$ نحصل على الحلين المستقلين**

$$Y_1(x) = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} e^{-x}, \qquad Y_2(x) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{6x}$$

**بذلك يكون الحل العام للمنظومة المتجانسة $Y' = AY$**

$$Y(x) = k_1 Y_1(x) + k_2 Y_2(x) = k_1 e^{-x}\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} + k_2 e^{6x}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

**وبتحقيق الشروط الابتدائية نحصل على**

$$Y(0) = k_1\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**ومنها المعادلتان**

$$\begin{aligned} 4k_1 + 4k_2 &= 1 \\ -4k_1 + 3k_2 &= 2 \end{aligned}$$

**بحلها آنيا نحصل على القيمتين**

$$k_2 = \frac{3}{7}, \qquad k_1 = \frac{-5}{28}$$

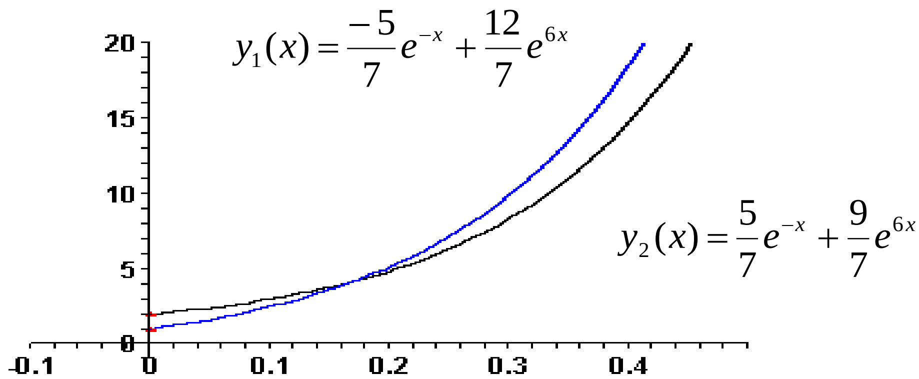
**بذلك يكون متجه الحل**

$$Y(t) = e^{-x}\begin{bmatrix} -5/7 \\ 5/7 \end{bmatrix} + e^{6x}\begin{bmatrix} 12/7 \\ 9/7 \end{bmatrix}$$

**أي أن دوال الحل هي**

$$y_1(x) = \frac{-5}{7}e^{-x} + \frac{12}{7}e^{6x}, \quad y_2(x) = \frac{5}{7}e^{-x} + \frac{9}{7}e^{6x}$$

**أما رسم دوال الحل فتجدها في الشكل (9.5) .**




**الشكل (9.5)**

**قيم ذاتية عقدية**

**إذا كانت** $\lambda_1$ **و** $\lambda_2$ **قيماً ذاتية للمصفوفة** $A$ **و** $V_1$ **و** $V_2$ **متجهات ذاتية مرتبطة بها على التوالي حيث**

$$\lambda_1=\alpha+\beta i \text{ ، } \lambda_2=\alpha-\beta i \quad \text{ ، } V_1=P+Qi \text{ ، } V_2=P-Qi \qquad \textbf{(9.10)}$$

**فإن**

$$Y_2(x)=V_2e^{\lambda_2 x},\ \ Y_1(x)=V_1e^{\lambda_1 x} \qquad \textbf{(9.11)}$$

**متجهات حل عقدية للمنظومة المتجانسة** $Y'=AY$ **.**

**بأستخدام صيغة أويلر** $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ **، كما فعلنا في البند (5.6) ، يمكن للطالب أن يجد حلين حقيقيين بالصيغة:**

$$\begin{aligned} Y_1(x)&=e^{\alpha x}(P\cos\beta x-Q\sin\beta x)\\ Y_2(x)&=e^{\alpha x}(P\sin\beta x+Q\cos\beta x) \end{aligned} \qquad \textbf{(9.12)}$$

**و يبرهن أنّهما مستقلان خطيا و ذلك بإثبات**

$$W(Y_1,Y_2)=\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix}\neq 0$$

**المثال (2): للمنظومة الخطية المتجانسة** $Y'=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}Y$

**أ- جد الحل العام**

**ب- ارسم الحقل الاتجاهي للمنظومة و علق على سلوك المنحنيات، ثم جد متجه الحل الذي يحقق القيم الابتدائية $y_1(0)=1,\ \ y_2(0)=0$ وبين توافق الرسم المعلمي مع الحقل الأتجاهي للمنظومة.**

**الحل:**

**أ- لإيجاد الحل العام علينا إيجاد القيم الذاتية لمصفوفة المعاملات $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ أولا، وذلك بحل معادلة المحدد**

$$\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\ 4 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(-1-\lambda)-(-8)=\lambda^2-2\lambda+5=0$$

**لنحصل على**

$$\lambda_1=\frac{-(-2)+\sqrt{(-2)^2-4(1)(5)}}{2(1)},\qquad \lambda_2=\frac{-(-2)-\sqrt{(-2)^2-4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$=1+2i \qquad\qquad =1-2i$$

و من ثم نجد متجهات ذاتية مرتبطة بالقيم الذاتية و ذلك بحل المنظومة الخطية $(A-\lambda I)V=0$ لكل من القيم الذاتية:

$$\lambda_1=1+2i\Rightarrow\begin{bmatrix}2-2i & -2\\ 4 & -2-2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

باستخدام العمليات الابتدائية على صفوف المنظومة ستؤول الى:

$$\begin{bmatrix}1-i & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

**ومن ذلك نحصل على المتجهات الذاتية المرتبطة بالقيمة الذاتية $\lambda_1$**

$$V_1=\begin{bmatrix}\alpha\\ (1-i)\alpha\end{bmatrix}$$

**باختيار قيمة مناسبة مثل $\alpha=1$ نحصل على المتجه**

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} i$$

**بالمقارنة مع الرموز المستخدمة في المعادلات (9.10) تكون**

$$\alpha = 1 \ , \ \beta = 2 \ , \ P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ Q = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**ومنها نحصل على المتجه الذاتي المرتبط بالقيمة الذاتية** $\lambda_2$

$$V_2 = P - Q\ i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} i$$

**وباستخدام المعادلة (9.12) نحصل على الحلين الحقيقيين المستقلين**

$$Y_1(x) = e^{x}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cos 2x - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\sin 2x\right),$$
$$Y_2(x) = e^{\alpha x}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\sin 2x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\cos 2x\right)$$

**بذلك يكون متجه الحل الحقيقي العام للمنظومة المتجانسة** $Y' = AY$

$$\begin{aligned} Y(x) &= k_1 Y_1(x) + k_2 Y_2(x) \\ &= k_1 e^{x}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cos 2x - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\sin 2x\right) + k_2 e^{x}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\sin 2x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\cos 2x\right) \\ &= \begin{bmatrix} e^{x}(k_1\cos 2x + k_2 \sin 2x) \\ e^{x}\{k_1(\cos 2x + \sin 2x) + k_2(\sin 2x - \cos 2x)\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

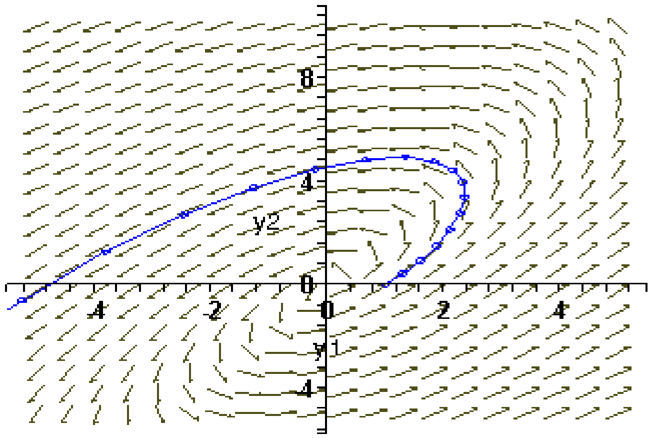
**بتعويض متجه القيم الابتدائية يؤول الحل العام الى**

$$Y(0) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_1 - k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**و منه نحصل على قيم الثوابت** $k_1 = 1, \ k_2 = 1$ **. و عليه يكون متجه الحل للمنظومة**

$$Y(x) = \begin{bmatrix} e^{x}(\cos 2x + \sin 2x) \\ 2e^{x}\sin 2x \end{bmatrix}$$

**ب- الشكل(9.6) يحوي الحقل الاتجاهي للمنظومة مع منحنى الحل الذي يحقق القيم الابتدائية المعطاة. ويلاحظ فيه أنّ جميع الحلول غير الصفرية تتباعد عن المركز $(0,0)$ بشكل حلزوني و من بينها الحل الذي يحقق القيم الابتدائية المعطاة.**




**الشكل (9.6)**

**المثال (3): جد متجه حل منظومة القيم الابتدائية**

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} Y, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**ثم ارسم دوال الحل على المستوي $xy$ .**

**الحل: بحل المعادلة $|A - \lambda I| = 0$، أي:**

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) + (2-\lambda) = (\lambda^2 + 1)(2-\lambda) = 0$$

**نحصل على القيم الذاتية** $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,\ \lambda_3 = 2$ **، و** بحل المنظومة الخطية $(A-\lambda I)V = 0$

لكل من القيم الذاتية نحصل على المتجهات الذاتية المرتبطة بها على التوالي:

$$V_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ ,\ V_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ ,\ V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**وبالمقارنة مع المعادلة (9.10) تكون** $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ ,\ Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **بالنسبة للمتجهين الاول والثاني.**

**بالتعويض في (9.12) نحصل على مجموعة الحلول الأساسية**

$$Y_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos x - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\sin x,\ \ Y_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cos x,\ \ Y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2x}$$

و بذلك نحصل على الحل العام

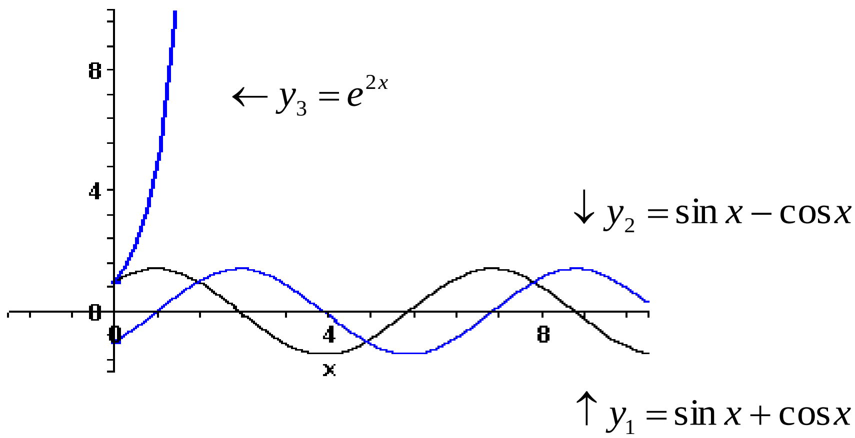
$$\begin{aligned} Y(x) &= k_1Y_1(x) + k_2Y_2(x) + k_3Y_3(x) \\ &= k_1\begin{bmatrix} -\sin x \\ \cos x \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \\ 0 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**بتعويض متجه القيم الابتدائية يؤول الحل العام الى:**

$$Y(0) = k_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**و منه نحصل على قيم الثوابت** $k_1 = -1,\ k_2 = 1,\ k_3 = 1$**. و عليه يكون متجه الحل للمنظومة (لاحظ الشكل 9.7):**

$$Y(x)=\begin{bmatrix} \sin x+\cos x \\ -\cos x+\sin x \\ e^{2x} \end{bmatrix}$$




**الشكل (9.7)**

**<u>قيم ذاتية مكررة</u>**

**إن إيجاد الحل العام للمنظومة $Y' = AY$ في حالة وجود قيم ذاتية مكررة للمصفوفة $A$ أكثر تعقيدا من الحالات السابقة. فهناك حالتان علينا اعتبارهما، الأولى عندما توجد متجهات ذاتية مرتبطة بالقيمة الذاتية المكررة و مستقلة خطيا بعدد التكرار نفسه، و الحالة الثانية عند وجود متجهات ذاتية بعدد أقل من عدد التكرار. في كلتا الحالتين نستطيع إيجاد متجهات حل مستقلة خطيا بعدد تكرار القيمة الذاتية المكررة. لتكن $A$ مصفوفة قيمها الذاتية مكررة ، أي $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. فإن كان هناك متجهان ذاتيان مرتبطان بالقيمة الذاتية المكررة ومستقلان خطيا فنستطيع إيجاد الحل العام للمنظومة $Y' = AY$ كما في حالة القيم الذاتية المختلفة. أما إذا كان هناك متجه ذاتي واحد فقط مرتبط بالقيمة الذاتية المكررة فسيكون الحل العام كالآتي:**

$$Y(x) = k_1 V_1 e^{\lambda x} + k_2 (V_1 x + V_2) e^{\lambda x} \qquad \textbf{(9.13)}$$

**حيث $V_2$ يمكن الحصول عليها بحل المنظومة الخطية $(A - \lambda_1 I)V_2 = V_1$.**

**المثال (4): جد متجه الحل العام للمنظومة** $Y' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} Y$

**الحل: بحل المعادلة**

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

**نحصل على القيم الذاتية** $\lambda_1 = \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 4$ **.** لحل المنظومة الخطية $(A-\lambda_1 I)V = 0$ لدينا

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**ومنها نحصل على المتجه الذاتي المرتبط بالقيمة الذاتية المكررة** $V = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta-\alpha \end{bmatrix}$**. وبما أن هناك معلمتين فيمكن الحصول على متجهين ذاتيين مستقلين خطيا وذلك باختيار قيم مناسبة للمعلمتين:**

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

لحل المنظومة الخطية $(A-\lambda_3 I)V = 0$ لدينا $\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$**.** باستخدام العمليات الاولية على صفوف المنظومة ستؤول الى $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **ومنها نحصل على المتجه الذاتي المرتبط بالقيمة الذاتية** $\lambda_3$**:** $V_3 = \begin{bmatrix} \alpha/2 \\ \alpha/2 \\ \alpha \end{bmatrix}$ و **باختيار قيمة** $\alpha = 2$ نحصل على المتجهات الذاتية المكونة لمجموعة الحل الأساسية:

$$V_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\ ,\ V_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\ ,\ V_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

و بذلك نحصل على الحل العام

$$Y(x)=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}e^{-2x}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}e^{-2x}+k_3\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}e^{4x}$$

**المثال (5): جد متجه الحل العام للمنظومة**

$$Y'=\begin{bmatrix}1&3&-3\\2&4&-5\\-4&2&-3\end{bmatrix}Y$$

**الحل: بحل المعادلة**

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&3&-3\\2&4-\lambda&-5\\-4&2&-3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

**نحصل على القيم الذاتية** $\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \ \lambda_3=8$ **.** لحل المنظومة الخطية $(A-\lambda_1 I)V=0$ لدينا

$$\begin{bmatrix}2&3&-3\\2&5&-5\\-4&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

باستخدام العمليات الاولية على صفوف المنظومة ستؤول الى

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

**ومنها نحصل على المتجه الذاتي المرتبط بالقيمة الذاتية المكررة** $V=\begin{bmatrix}0\\ \alpha\\ \alpha\end{bmatrix}$**. وبما أن هناك معلمة واحدة فقط فلا يمكن الحصول على متجهين ذاتيين مستقلين خطيا و مرتبطين بالقيمة الذاتية المكررة.**

**باختيار قيمة مناسبة للمعلمة مثل** $\alpha=1$ **نحصل على** $V_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ **و منه على الحل الأول**

$Y_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}e^{-x}$**. ويمكن في هذه الحالة إيجاد حل ثانٍ** $Y_2=(V_1x+V_2)e^{-x}$ حسب المعادلة **(9.13)**،

**حيث** $V_2$ **يمكن الحصول عليها بحل المنظومة الخطية** $(A-\lambda_1 I)V_2=V_1$، أي

$$\begin{bmatrix}6 & 3 & -3\\ 2 & 5 & -5\\ -4 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

باستخدام العمليات الاولية على صفوف المنظومة ستؤول الى

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/8\\ 1/4\\ 0\end{bmatrix}$$

**ومنها نحصل على** $V_2=\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{8}\\ \dfrac{1}{4}+\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}$ و **باختيار قيمة** $\alpha=0$ نحصل على الحل الثاني

$$Y_2=\left(\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-1/8\\ 1/4\\ 0\end{bmatrix}\right)e^{-x}$$

أما الحل الثالث المستقل خطيا فنحصل عليه من حل المنظومة الخطية $(A-\lambda_3 I)V=0$، أي

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & -5 \\ -4 & 2 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باستخدام العمليات الاولية على صفوف المنظومة ستؤول الى

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**ومنها نحصل على المتجه الذاتي المرتبط بالقيمة الذاتية المكررة** $V_3=\begin{bmatrix} -9\alpha/2 \\ -7\alpha/2 \\ \alpha \end{bmatrix}$**.**

**باختيار قيمة مناسبة** $\alpha=-2$ **نحصل على** $V_3=\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ **و منه على الحل الثالث:** $Y_3=\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}e^{8x}$

و بذلك نحصل على الحل العام:

$$Y(x)=k_1Y_1(x)+k_2Y_2(x)+k_3Y_3(x)$$

$$=k_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-x}+k_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} -1/8 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}\right)e^{-x}+k_3\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}e^{8x}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{-1}{8}k_2e^{-x}+9k_3e^{8x} \\ k_1e^{-x}+k_2(x+\frac{1}{4})e^{-x}+7k_3e^{8x} \\ k_1e^{-x}+k_2xe^{-x}-2k_3e^{8x} \end{bmatrix}$$

## 9.4 حلول المنظومات الخطية غيرالمتجانسة من الرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة:

**(Solutions of 1st order linear nonhomogeneous systems with constant coeff.)**

**لقد تعلمنا في الفصل الخامس كيف نحل المعادلات غير المتجانسة بطريقة المعاملات غير المحددة و طريقة تغيير المعلمات. سنرى في هذا البند أنّ الطريقتين يمكن استخدامهما لحل منظومات المعادلات التفاضلية الخطية وغيرالمتجانسة بمعاملات ثابتة ، أي بالصيغة**

$$Y' = AY + G(x) \qquad \textbf{(9.14)}$$

**حيث** $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad G(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}$$

**إن الحل العام للمنظومة (9.14) يأخذ الصيغة** $Y(x) = Y_c(x) + Y_p(x)$ **حيث** $Y_c(x)$ **الحل العام للمنظومة المتجانسة المقترنة بالمنظومة، أي** $Y' = AY$ **، و** $Y_p(x)$ **حل خاص للمنظومة (9.14).**

**المثال (1): جد متجه الحل العام للمنظومة غير التجانسة**

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} e^{3x} \\ x \end{bmatrix}.$$

**الحل: نجد أولا الحل المكمل، أي الحل العام للمنظومة المتجانسة** $Y' = AY$ **حيث** $A = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ،

**وذلك بحل المعادلة** $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 8 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ **لنحصل على القيم الذاتية** $\lambda_1 = -4, \ \lambda_2 = 4$ ثم

نجد متجهات ذاتية مرتبطة بها وذلك بحل المنظومة الخطية $(A - \lambda I)V = 0$ لكل من القيم الذاتية.

$$\lambda_1 = -4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

**باختيار قيمة مناسبة مثل $\alpha = 1$ نحصل على الحلين المستقلين**

$$Y_1(x) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4x}, \qquad Y_2(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4x}$$

**بذلك يكون الحل المكمل**

$$Y_c(x) = k_1 Y_1(x) + k_2 Y_2(x) = k_1 e^{-4x}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 e^{4x}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**لإيجاد الحل الخاص للمنظومة غير المتجانسة نكتب الدالة بالشكل** $G(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$

**لنرى إن كان هناك أي تطابق مع مركبات الحل المكمل. وبما أنه لايوجد تطابق فصيغة الحل الخاص هي $Y_p = Pe^{3x} + Qx + R$ . وبالتعويض في المنظومة غير المتجانسة نحصل على المعادلة:**

$$3Pe^{3x} + Q = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} Pe^{3x} + \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} Qx + \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

**وبمقارنة المعاملات نحصل على المنظومات الخطية الآتية:**

$$3P = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - 3I)P = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} -3/7 \\ -2/7 \end{bmatrix}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} Q + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} Q = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} R \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/16 \end{bmatrix}$$

**ومنها نحصل على الحل الخاص**

$$Y_p = Pe^{3x} + Qx + R = \begin{bmatrix} -3/7 \\ -2/7 \end{bmatrix} e^{3x} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/16 \end{bmatrix}$$

و بذلك يكون متجه الحل العام للمنظومة غير التجانسة

$$Y(x) = Y_c(x) + Y_p(x)$$

$$= k_1 e^{-4x} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 e^{4x} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/7 \\ -2/7 \end{bmatrix} e^{3x} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2k_1 e^{-4x} + 2k_2 - \frac{3}{7} e^{3x} - \frac{1}{2} x \\ k_1 e^{-4x} + k_2 - \frac{2}{7} e^{3x} - \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

## 9.5 المخرجات التعليمية للفصل (Learning outcomes)

بعد الانتهاء من دراسة الفصل يكون الطالب قد أتقن المخرجات التعليمية الآتية:

1. التعرف على منظومات مسائل القيم الأبتدائية.
2. حل منظومات المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة.
3. التعرف على المجموعة الأساسية للحلول.
4. التعرف على القيم الذاتية والمتجهات الذاتية وتصنيفها.
5. إيجاد حلول المنظومات الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة.
6. إيجاد حلول المنظومات الخطية غيرالمتجانسة من الرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة.
7. كتابة مسائل القيم الابتدائية من الرتب العليا على شكل منظومات قيم ابتدائية من الرتبة الأولى.
8. كتابة منظومات القيم الابتدائية من الرتب العليا على شكل منظومات قيم ابتدائية من الرتبة الأولى.
9. إيجاد حل منظومة القيم الابتدائية مع رسمها.
10. المقدرة على استخدام القرص الممغنط المرافق للكتاب لمراجعة محتويات الكتاب والتعرف على أمثلة واقعية.

# تمارين الفصل التاسع

أكتب كلاً من مسائل القيم الابتدائية من الرتب العليا من 1- 4 على شكل منظومات قيم ابتدائية من الرتبة الأولى، ثم بين فيما لو كانت خطية أم لا:

**.1** $xy'' - 2xy' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

**.2** $2y''' - xy'' + 2yy' = \sin x, \; y(0) = -1, \; y'(0) = 2, \; y''(0) = 1$

**.3** $x^2 y'' - 2xy' - 3y^2 = e^x, \quad y'(0) = 1, \; y(0) = 0$

**.4** $x'' + 64x = \sin t, \quad x(\pi) = 1, \; x(\pi) = 0$

أكتب كلاً من منظومات القيم الابتدائية من الرتب العالية في المسائل من 5 – 6 على شكل منظومة قيم ابتدائية من الرتبة الأولى:

**.5**
$$\begin{aligned} &x' = 2x - y - 2t, && x(0) = 2 \\ &y'' = 5x - 2y - y' + t^2, && y(0) = 1, \; y'(0) = 3 \end{aligned}$$

**.6**
$$\begin{aligned} &x'' = x + y - 2x' - y' + \sin 2t, && x(0) = 2, \; x'(0) = 1 \\ &y'' = x - y - x' + y', && y(0) = 1, \; y'(0) = 3 \end{aligned}$$

**.7** أثبت أنّ $\{y_1(x) = \cos x - 3\sin x + 14, \;\; y_2(x) = -\cos x - 2\sin x + 11\}$ تمثل مجموعة دوال حل منظومة القيم الابتدائية $Y' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}, Y(0) = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix}$ ثم ارسم

أ- دوال الحل $\{y_1(x), \;\; y_2(x)\}$ على المستوي - $xy$ .

ب- منحني الحل معلميا بشكل $\{(y_1(x), y_2(x))\}$ على المستوي - $y_1 y_2$ مع بيان اتجاه الحركة على المنحنى.

ج- الحقل الاتجاهي لمنظومة المعادلات التفاضلية و مقارنة الأتجاهات مع إتجاهات منحني الحل.

بين باستخدام محدد رونسكيان فيما لو كانت متجهات حل المنظومة $Y' = AY$ تشكل مجموعة أساسية على الفترة $(-\infty,\infty)$ في المسائل من 8 - 11:

**8.** $$Y_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-x}, \qquad Y_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{x}$$

**9.** $$Y_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{x}, \qquad Y_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2x}$$

**10.** $$Y_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{x}, \qquad Y_2(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} e^{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} xe^{x}$$

**11.** $$Y_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{bmatrix}, \quad Y_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4x}, \quad Y_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} e^{3x}$$

**12.** بين أنّ المتجه $Y(x) = k_1 e^{-x}\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} + k_2 e^{-2x}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 e^{3x}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ هو الحل العام للمنظومة $Y' = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y$ على الفترة $(-\infty,\infty)$.

**13.** بين أنّ المتجه $Y_p(x) = \begin{bmatrix} \sin 3x \\ 0 \\ \cos 3x \end{bmatrix}$ هو حل خاص للمنظومة $Y' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \sin 3x$ على الفترة $(-\infty,\infty)$.

**14.** إذا كانت $A$ مصفوفة قيمها الذاتية $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ و كان هناك متجه ذاتي واحد $V_1$ مرتبط بالقيمة الذاتية المكررة فأثبت أنّ المجموعة الأساسية لحل منظومة المعادلات التفاضلية $Y' = AY$ هي $\{Y_1 = V_1 e^{\lambda x},\ Y_2 = (V_1 x + V_2) e^{\lambda x}\}$ حيث $(A - \lambda_1 I)V_2 = V_1$.

جد الحل الحقيقي العام ثم ارسم الحقل الاتجاهي للمنظومة وعلق على سلوك المنحنيات، لكل من المنظومات الخطية المتجانسة في المسائل من 15 - 22:

**.15** $Y' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} Y$ ، **.16** $Y' = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{bmatrix} Y$ ، **.17** $Y' = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} Y$

**.18** $Y' = \begin{bmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} Y$ ، **.19** $Y' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} Y$ ، **.20** $Y' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} Y$

**.21** $Y' = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} Y$ ، **.22** $Y' = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} Y$.

جد الحل الحقيقي العام ثم ارسم دوال الحل، لكل من المنظومات الخطية في المسائل من 23 - 30:

**.23** $Y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y$ ، **24** $Y' = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} Y.$ ،

**. 25** $Y' = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 5 & 10 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} Y$ ، **.26** $Y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} Y$ ،

**.27** $Y' = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} Y$ ، **.28** $Y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y$

**.29** $Y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y$ ، **.30** $Y' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y$

**جد حل كل من منظومات القيم الابتدائية في المسائل من 31 - 34 ، ثم ارسم دوال الحل:**

**.31** $Y' = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} Y,\ \ Y(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، **.32** $Y' = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} Y,\ \ Y(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$

**.33** $Y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} Y,\ \ Y(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$ ، **.34** $Y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} Y,\ \ Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

**جد الحل الحقيقي العام ثم ارسم دوال الحل، لكل من المنظومات الخطية غيرالمتجانسة في المسائل من 35 - 38:**

**.35** $Y' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} -2x^2 \\ x+5 \end{bmatrix}$ ، **.36** $Y' = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} \sin x \\ -2\cos x \end{bmatrix}$

**.37** $Y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4x}$ ، **.38** $Y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 40 \end{bmatrix}$

**جد حل منظومة القيم الابتدائية في المسائل من 39 - 41 ، ثم ارسم دوال الحل:**

**.39** $Y' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix},\ \ Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

**.40** $Y' = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix},\ \ Y(0) = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

**.41** $Y' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \end{bmatrix},\ \ Y(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$